Saarlandes
1969

O. Opitz

ÜBER ENDLICHE ZWEIPERSONEN-KONKURRENZ-SPIELE

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
vorgelegt von

Otto Opitz
Deggendorf/Bayern

Saarbrücken 1968

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552706_0010

Erstberichterstatter: Prof. Dr. J. André

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. H. Söhngen

Dekan: Prof. Dr. H.D. Dietze

Tag der mündlichen Prüfung: 14.2 1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 5

I. KAPITEL:
GEOMETRISCHE KRITERIEN FÜR ENDLICHE ZWEIPERSONEN-SPIELE

1.) Endliche Zweipersonen-Spiele in Normalform 10

2.) Aussagen über die Strategienräume beider Spieler 27

3.) Hinreichende Bedingungen für dominierte Strategien 46

II. KAPITEL:
AUSSAGEN ÜBER KONKURRENZ-SPIELE

4.) Der Begriff des Konkurrenz-Spiels 67

5.) Zusammenhang reduzierter Teilspiele von von Konkurrenz-Spielen mit Nullsummen-Spielen 93

Seite

6.) Zusammenhang wesentlicher Teilspiele
von Konkurrenz-Spielen mit
Nullsummen-Spielen 119

Literaturhinweise 135

Bezeichnungen:

$A \Longrightarrow B$	A impliziert B
$\Longleftrightarrow B$	A impliziert B und B impliziert A
$A :\Longleftrightarrow B$	A wird durch die Aussage B definiert
$A := B$	A ist definitionsgemäß gleich B
$\bigwedge$	Allquantor
$\bigvee$	Existenzquantor

$a \in A \;:\Longleftrightarrow$ a ist Element von A

$A \subset B \;:\Longleftrightarrow \; (a \in A \quad b \in B)$

$A \subsetneq B \;:\Longleftrightarrow \; A \subset B \wedge \bigvee a \in B: a \notin A$

$A \cup B := \{a: a \in A \vee a \in B\}$

$A \cap B := \{a: a \in A \wedge a \in B\}$

$A \supset B \qquad A - B := \{a \in A: a \notin B\}$

$A := (a_{ij})$ heißt die Matrix, deren Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte a_{ij} ist.

$\mathfrak{a}_i$ heißt der i-te Zeilenvektor von A .

$\mathfrak{a}^j$ heißt der j-te Spaltenvektor von A .

Einleitung

Das soziale Verhalten des Menschen ist stark geprägt durch den Wunsch nach möglichst großen Nutzen, z.B. in der Form von Geld, Sättigung, Ansehen, Freizeit, usw. Viele wirtschaftliche, politische und militärische Verhaltensweisen kann man an einer entsprechenden Nutzenskala erklären und formal vergleichen mit der Verhaltensweise des Menschen bei gewissen Gesellschaftsspielen. Die Theorie der strategischen Spiele befaßt sich mit der Frage nach dem "optimalen" Verhalten der an einem Geschehen beteiligten Individuen bzw. Personengruppen. Sie studiert einfache Modelle eines der oben aufgeführten Bereiche unter den verschiedenartigsten Bedingungen wie Sicherheit, Risiko oder Ungewißheit.
Der Beitrag der Spieltheorie liegt bis heute allerdings nicht so sehr in dem Bereich der Lösung von praktischen Problemen, sondern die Fortschritte und Ergebnisse, insbesondere der Zweipersonen-Nullsummen-Spiele, haben in erster Linie die Entwicklung der Mathematischen Statistik, sowie der linearen und nichtlinearen Programmierung, beeinflußt. Die Theorie dieser speziellen Zweipersonen-Spiele darf insofern als im wesentlichen abgeschlossen betrachtet werden, als das sogenannte Minimaxprinzip, welches den fundamentalen Beitrag des Mathematikers John von Neumann darstellt, für beide Spieler ein "rationales" Verhalten angibt. Der in Zweipersonen-Nullsummen-Spielen enthaltene vollständige Interessengegensatz stellt zudem eine realistische Annahme für sehr viele Gesellschaftsspiele und vor

allem auch militärische Operationen dar, auch Situationen im Wirtschaftsleben lassen sich entsprechend interpretieren. Jedoch fällt es außerhalb dieser schnell abgegrenzten Gebiete nicht leicht, mit Hilfe von spieltheoretischen Mitteln weiterführende Aussagen zu machen.
Dazu ergeben sich in der Erfassung der allgemeinen Mehrpersonen-Spiele, ja schon der allgemeinen Zweipersonen-Spiele zu große Schwierigkeiten, was man unter optimalem Verhalten der Spieler zu verstehen hat. Es existieren wohl sehr interessante Arbeiten mit Lösungsvorschlägen; immer wieder sind jedoch Beispiele zu finden, für die die vorhandenen Lösungsvorschläge noch nicht voll befriedigend sind.

So empfiehlt es sich, erst die Theorie von Zweipersonen-Spielen zu erforschen, an die zusätzliche Forderungen geknüpft sind, die aber über die Annahme der Nullsummenbedingung hinausgehen. In der folgenden Arbeit werden Zweipersonen-Spiele behandelt, in denen eine sehr starke Konkurrenzsituation der Beteiligten vorausgesetzt ist, die aber allgemeiner als die Nullsummenbedingung ist. Dabei wird aufgezeigt, inwieweit diese "Zweipersonen-Konkurrenz-Spiele" lösbar sind, bzw. inwieweit sich die Lösungstheorie für Zweipersonen-Nullsummen-Spiele auf diesen Spieltyp übertragen läßt.

Im ersten Kapitel der Arbeit werden geometrische Kriterien für endliche Zweipersonen-Spiele angegeben.
Im ersten Abschnitt davon wird der Begriff des endlichen Zweipersonen-Spiels in Normalform eingeführt. Dabei wird etwas ausführlicher der Begriff der Gleichgewichts- und der Minimaxstrategie diskutiert, was an späterer Stelle von Bedeutung sein wird. Ferner werden Bedingungen angegeben, nach welchen eine Strategie einer anderen vorzuziehen ist. So kommt man zum Begriff der Dominanz von Strategien und der Reduktion von Strategiemengen, sowie dadurch zum Begriff des reduzierten Teilspiels eines Zweipersonen-Spiels. Will man bei Reduktion keine Gleichgewichtsstrategien verlieren, so definiert man ein weiteres Teilspiel, das wesentliche Teilspiel eines Zweipersonen-Spiels.
Der zweite Abschnitt enthält Aussagen über die Strategienräume der beiden Spieler. Ein Zusammenhang zwischen den beiden Strategienräumen ist durch die Auszahlungsfunktionen gegeben. Definiert wird dann eine Menge, die als Elemente alle die Strategien eines Spielers enthält, gegen die eine feste Strategie des anderen Spielers maximale Gegenstrategie ist. Im weiteren Verlauf des Abschnittes werden einige Aussagen über Mengen der angegebenen Form bewiesen. Dazu werden unter anderem Hilfsmittel aus der elementaren Topologie und der Theorie der konvexen Polyeder benutzt.

Diese in Abschnitt 2 gewonnenen Ergebnisse werden in Abschnitt 3 erweitert und verfeinert. Schließlich wird die Beziehung zwischen den betrachteten geometrischen Gebilden und den endlichen Zweipersonen-Spielen wiederhergestellt. Insbesondere erhält man auf diese Weise hinreichende Bedingungen für dominierte Strategien bei allgemeinen Zweipersonen-Spielen.

Im zweiten Kapitel werden weitere Bedingungen an ein endliches Zweipersonen-Spiel in Normalform gestellt, die der vorher angedeuteten Konkurrenzsituation innerhalb des Spiels zwischen den Beteiligten entsprechen: Gegen eine feste Strategie des einen Spielers S soll die für den Gegenspieler "beste" Strategie zugleich die für den Spieler S verlustreichste sein. So kommt man zum Begriff des Zweipersonen-Konkurrenz-Spiels.
Im 4. Abschnitt werden einige elementaren Sätze über Konkurrenz-Spiele bewiesen. Es wird unter anderem gezeigt, daß die Gleichgewichtspunkte in Konkurrenz-Spielen äquivalent und vertauschbar sind. Betrachtet man Konkurrenz-Spiele unter dem Aspekt der Dominanz und Reduktion, wie dies für allgemeine Zweipersonen-Spiele in Abschnitt 1 geschehen ist, so zeigt sich, daß die Konkurrenzeigenschaft gegenüber Reduktion invariant ist.
Nachdem der Zusammenhang zwischen Konkurrenz-Spielen und Nullsummen-Spielen in Abschnitt 4 nur kurz abgehandelt ist, wird in Abschnitt 5 das erstrebte Ergebnis dieser

Arbeit bewiesen: Das reduzierte Teilspiel eines Konkurrenz-Spiels ist strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel. Zum Beweis werden elementare graphentheoretische Methoden herangezogen.

Schließlich kann in Abschnitt 6 gezeigt werden, daß auch das wesentliche Teilspiel eines Konkurrenz-Spiels strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel ist. In einem abschließenden Beispiel wird gezeigt, daß bereits das minimale Teilspiel, welches das reduzierte und das wesentliche Teilspiel enthält, nicht notwendig strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel ist.

Für die Anleitung zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Dr. Andre herzlich danken.

I. KAPITEL :

GEOMETRISCHE KRITERIEN FÜR ENDLICHE ZWEIPERSONEN - SPIELE

1.) Endliche Zweipersonen-Spiele in Normalform

Ein endliches, allgemeines Zweipersonen-Spiel Γ in seiner Normalform, im folgenden kurz Spiel Γ genannt, ist gekennzeichnet durch

a) die reinen Strategiemengen $X := \{x_1,\dots,x_m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$
von Spieler I und $Y := \{y_1,\dots,y_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$
von Spieler II, dabei sei $X \neq \emptyset \neq Y$,

b) die Auszahlungsfunktionen $a: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$
$b: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

Man schreibt kurz: $\Gamma := (X,Y;a,b)$.

Spielt Spieler I eine Strategie $x_i \in X$ und Spieler II unabhängig davon eine Strategie $y_j \in Y$, so bezeichnet man das Paar $(x_i,y_j) \in X \times Y$ als Partie. Die Auszahlungen an die beiden Spieler ergeben sich aus den Werten

$$a_{ij} := a(x_i,y_j) \quad \text{bzw.} \quad b_{ij} := b(x_i,y_j) .$$

Ist dabei a_{ij} bzw. b_{ij} positiv, so bedeutet diese Auszahlung einen Gewinn, andernfalls einen Verlust.
Da bei der Betrachtung der Normalform eines Spieles nur die von den Spielern erzielten Schlußgewinne einer Partie interessieren, kann jedes endliche Spiel durch zwei Matrizen

$$A := (a_{ij}) \quad , \quad B := (b_{ij})$$

charakterisiert werden.

Hat Spieler I gerade m reine Strategien, Spieler II seinerseits n reine Strategien, so besitzen die Matrizen A bzw. B jeweils m Zeilen und n Spalten, die Elemente a_{ij} bzw. b_{ij} geben den Gewinn (Verlust) des Spielers I bzw. II an, den er nach Beendigung der Partie (x_i,y_j) mit $x_i \in X$ und $y_j \in Y$ erzielen wird. Man bezeichnet A und B als Auszahlungsmatrizen der beiden Spieler.

Versteht man im folgenden unter x_i (i=1,...,m) den Punkt des $\mathbb{R}^m$, dessen Ortsvektor gerade der i-te Einheitsvektor ist, ebenso unter y_j (j=1,...,n) den Punkt des $\mathbb{R}^n$, dessen Ortsvektor der j-te Einheitsvektor ist, so wird die konvexe Hülle P von X als Menge der gemischten Strategien von Spieler I, die konvexe Hülle Q von Y als Menge der gemischten Strategien von Spieler II bezeichnet. Es gilt also:

$$(1.1)\quad P := \left\{ \mathfrak{p} \in \mathbb{R}^m : \mathfrak{p} := \sum_{i=1}^{m} p_i x_i,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \text{ für alle } i=1,\ldots,m \right\}$$

$$(1.2)\quad Q := \left\{ \mathfrak{q} \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{q} := \sum_{j=1}^{n} q_j y_j,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0 \text{ für alle } j=1,\ldots,n \right\}$$

Dann stellt P das (m-1) - dimensionale Standardsimplex im $\mathbb{R}^m$ und Q das (n-1) - dimensionale Standardsimplex im $\mathbb{R}^n$ dar.

Die gemischte Erweiterung $\bar{\sigma}$ von σ ist gekennzeichnet durch $(P,Q;a,b)$; die Auszahlungen $a(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ bzw. $b(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{p} \in P$ und $\mathfrak{q} \in Q$ stellen die aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten Erwartungswerte der Auszahlungen $a(x_i,y_j)$ bzw. $b(x_i,y_j)$ dar, es gilt:

$$(1.3) \qquad a(\varrho,\sigma) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a(x_i,y_j)$$

$$(1.4) \qquad b(\varrho,\sigma) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j b(x_i,y_j) .$$

Gilt nun $U \subset P$ sowie $V \subset Q$, so bezeichnet man $(U,V;a,b)$ als Teilspiel des allgemeinen Spiels $(P,Q;a,b)$. Dabei sind $a = a/U\times V$ und $b = b/U\times V$ die Restriktionen von a und b auf die Menge $U\times V$. Insbesondere ist (X,Y,a,b) Teilspiel zu $(P,Q;a,b)$. Trivialerweise ist jedes Teilspiel eines Spiels ebenfalls ein Spiel.

DEFINITION 1.1:
Gegeben sind die Spiele $\Gamma := (U,V;a,b)$ und $\Gamma' := (U',V';a',b')$. Dann heißt Γ strategisch äquivalent zu Γ', wenn es bijektive Abbildungen $f: U \to U'$ sowie $g: V \to V'$ und Konstanten $k_1,k_2 \in (0,\infty)$, $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$(1.5) \qquad \begin{cases} a'(f(\varrho),g(\sigma)) := k_1 a(\varrho,\sigma) + c_1 \\ b'(f(\varrho),g(\sigma)) := k_2 b(\varrho,\sigma) + c_2 \end{cases}$$
$$\text{für alle } \varrho \in U, \ \sigma \in V.$$

Von besonderem Interesse sind bei Spielen in Normalform für beide Spieler Strategien von minimalem Risiko.

So kommt man zu den Begriffen der Gleichgewichts - und Minimaxstrategie eines Spielers.

DEFINITION 1.2

Sei $\Gamma = (U,V;a,b)$ ein endliches Spiel.

Dann heißt (φ_1,ψ_1) mit $\varphi_1 \in U$ und $\psi_1 \in V$ Gleichgewichtspunkt zu Γ, wenn gilt:

(1.6) $a(\varphi_1,\psi_1) \geq a(\varphi,\psi_1)$ für alle $\varphi \in U$,

(1.7) $b(\varphi_1,\psi_1) \geq b(\varphi_1,\psi)$ für alle $\psi \in V$.

Man bezeichnet φ_1 bzw. ψ_1 als Gleichgewichtsstrategien der Spieler I bzw. II.

DEFINITION 1.3:

(1) $\varphi^* \in U$ heißt Minimaxstrategie von Spieler I in U, wenn gilt:

$$(1.8) \quad \min_{\psi \in V} a(\varphi^*,\psi) = \max_{\varphi \in U} \min_{\psi \in V} a(\varphi,\psi) .$$

(2) Entsprechend heißt $\psi^* \in V$ Minimaxstrategie von Spieler II in V, wenn gilt:

$$(1.9) \quad \min_{\varphi \in U} b(\varphi,\psi^*) = \max_{\psi \in V} \min_{\varphi \in U} b(\varphi,\psi) .$$

In diesem Zusammenhang sei das für Nullsummen-Spiele erstmals von John von Neumann bewiesene Minimaxtheorem angegeben:

SATZ 1.2:

Sei $\bar{\Gamma} = (P,Q;a,-a)$ ein endliches Nullsummen-Spiel.

Dann gilt:

$$(1.10) \quad \max_{\varphi \in P} \min_{\psi \in Q} a(\varphi,\psi) = \min_{\psi \in Q} \max_{\varphi \in P} a(\varphi,\psi) .$$

Zum Beweis vgl. I 8 I, Kapitel I/4, Theorem 1.4.1, Seite 26 .

KOROLLAR 1.2.1:

Sei $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ ein endliches Spiel. Dann gilt:

$$(1.11)\quad \max_{\varphi\in P}\min_{\psi\in Q} a(\varphi,\psi) = \min_{\psi\in Q}\max_{\varphi\in P} a(\varphi,\psi)$$

$$(1.12)\quad \max_{\psi\in Q}\min_{\varphi\in P} b(\varphi,\psi) = \min_{\psi\in Q}\max_{\varphi\in P} b(\varphi,\psi)$$

Beweis:

Dem Spiel $\bar{\sigma}$ lassen sich die Nullsummen-Spiele

$\bar{\sigma}_a := (P,Q;a,-a)$ und $\bar{\sigma}_b := (P,Q;-b,b)$ zuordnen.

Nach Satz 1.2 folgt (1.11) und wegen

$$\max_{\varphi\in P}\min_{\psi\in Q} -b(\varphi,\psi) = -\min_{\varphi\in P}\max_{\psi\in Q} b(\varphi,\psi)$$

und

$$\min_{\psi\in Q}\max_{\varphi\in P} -b(\varphi,\psi) = -\max_{\psi\in Q}\min_{\varphi\in P} b(\varphi,\psi)$$

auch (1.12) .

Die Gleichungen (1.11) und (1.12) gelten jedoch nicht notwendig für $(U,V;a,b)$ mit $U\subset P$ und $V\subset Q$, in diesem Fall hat man lediglich:

$$\max_{\varphi\in U}\min_{\psi\in V} a(\varphi,\psi) \leq \min_{\psi\in V}\max_{\varphi\in U} a(\varphi,\psi)$$

$$\max_{\psi\in V}\min_{\varphi\in U} b(\varphi,\psi) \leq \min_{\varphi\in U}\max_{\psi\in V} b(\varphi,\psi) \quad .$$

Somit gelangt man zu

DEFINITION 1.4:

(1) Sei $\sigma = (U,V;a,b)$ endliches Spiel mit $U\subset P$, $V\subset Q$.

Dann heißt

$$(1.13)\quad a_*(U,V) := \max_{\varphi\in U}\min_{\psi\in V} a(\varphi,\psi) \leq \min_{\psi\in V}\max_{\varphi\in U} a(\varphi,\psi)$$

der <u>Garantiewert des Spielers I</u> in σ.

(2) Entsprechend heißt

$$(1.14)\quad b_*(U,V) := \max_{\eta\in V}\min_{\xi\in U} b(\xi,\eta) \leq \min_{\xi\in U}\max_{\eta\in V} b(\xi,\eta)$$

der Garantiewert des Spielers II in σ .

Während bei Nullsummen-Spielen der Begriff der Minimaxstrategie äquivalent ist mit dem Begriff der Gleichgewichtsstrategie, gilt dies nicht notwendig für allgemeine Spiele.

Dies sei erläutert an

Beispiel 1:

Gegeben sei das endliche Spiel $\sigma_1 = (X,Y;a,b)$ durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dann ist (x_1,y_1) der einzige Gleichgewichtspunkt von σ_1 .

Andererseits gilt:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} a(x,y) = \max\{a(x_1,y_2),a(x_2,y_1)\} = a(x_2,y_1)$$

$$= \min_{y\in Y} a(x_2,y) = 1 \neq \min_{y\in Y} a(x_1,y) = a(x_1,y_2) = 0 .$$

Dann ist x_2 die einzige Minimaxstrategie aus X.

Analog gilt:

$$\max_{y\in Y}\min_{x\in X} b(x,y) = \max\{b(x_2,y_1),b(x_1,y_2)\} = b(x_2,y_1)$$

$$= \min_{x\in X} b(x,y_1) = 2 \neq \min_{x\in X} b(x,y_2) = b(x_1,y_2) = 0 .$$

Dann ist y_1 die einzige Minimaxstrategie aus Y.

Für Spieler II stimmen Gleichgewichtsstrategien und Minimaxstrategien überein, aber nicht für Spieler I .

SATZ 1.3 :

Sei (P,Q;a,b) endliches Spiel mit dem Gleichgewichtspunkt $(\bar{\varrho},\bar{\sigma})$, und $\bar{\varrho} = (\bar{p}_1,..,\bar{p}_m)$, $\bar{\sigma} = (\bar{q}_1,..,\bar{q}_n)$. Dann gilt:

(1.15) $a(x_i,\bar{\sigma}) = a(\bar{\varrho},\bar{\sigma})$ für alle i: $\bar{p}_i > 0$

(1.16) $b(\bar{\varrho},y_j) = b(\bar{\varrho},\bar{\sigma})$ für alle j: $\bar{q}_j > 0$

Zum Beweis benutzt man Definition 1.2. Dann gilt:

$$a(\bar{\varrho},\bar{\sigma}) \geqslant a(x_i,\bar{\sigma}) \text{ für alle } i = 1,\ldots,m.$$

Angenommen, es existiert ein i: $\bar{p}_i > 0$, so daß gilt

$$a(\bar{\varrho},\bar{\sigma}) > a(x_i,\bar{\sigma}) ,$$

so folgert man daraus:

$$\begin{aligned} a(\bar{\varrho},\bar{\sigma}) &= \sum_{\mu=1}^{m} \bar{p}_\mu a(x_\mu,\bar{\sigma}) = \\ &= \sum_{\mu\neq i} \bar{p}_\mu a(x_\mu,\bar{\sigma}) + \bar{p}_i a(x_i,\bar{\sigma}) \\ &< \sum_{\mu\neq i} \bar{p}_\mu a(x_\mu,\bar{\sigma}) + \bar{p}_i a(\bar{\varrho},\bar{\sigma}) \\ &= \sum_{\mu\neq i} \bar{p}_\mu a(x_\mu,\bar{\sigma}) + \bar{p}_i \sum_{\mu=1}^{m} \bar{p}_\mu a(x_\mu,\bar{\sigma}) \\ &= a(\varrho^0,\bar{\sigma}) , \end{aligned}$$

wobei $\varrho^0 = (p_1^0,\ldots,p_m^0)$ ist mit

$$p_\mu^0 = \begin{cases} \bar{p}_\mu^2 & \text{für } \mu = i \\ \bar{p}_\mu + \bar{p}_i\bar{p}_\mu & \text{für } \mu \neq i \end{cases} .$$

Da ϱ^0 wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{m} p_\mu^0 &= \sum_{\mu\neq i} (\bar{p}_\mu + \bar{p}_i\bar{p}_\mu) + \bar{p}_i^2 \\ &= \sum_{\mu\neq i} \bar{p}_\mu + \bar{p}_i \sum_{\mu=1}^{m} \bar{p}_\mu = \sum_{\mu\neq i} \bar{p}_\mu + \bar{p}_i = 1 \end{aligned}$$

und $p_\mu^0 > 0$ für $\mu = 1,\ldots,m$

eine Strategie des Spielers I darstellt, hätte man mit

$$a(\bar{\varrho},\bar{\eta}) < a(\varrho^0,\bar{\eta})$$

einen Widerspruch zu (1.6), daraus folgt die Behauptung (1.15).

Ganz analog zeigt man auch (1.16) .

DEFINITION 1.5:

(1) Eine Strategie $\varrho := (p_1,\ldots,p_m)$ aus P heißt streng gemischt, wenn $p_i > 0$ für alle $i = 1,\ldots,m$ gilt. Man schreibt: $\varrho > \nu$.

(2) Ebenso heißt eine Strategie $\eta := (q_1,\ldots,q_n)$ aus Q streng gemischt, wenn $q_j > 0$ für alle $j = 1,\ldots,n$ gilt. Man schreibt: $\eta > \nu$.

KOROLLAR 1.3.1:

Sei $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ endliches Spiel und $(\bar{\varrho},\bar{\eta})$ sei Gleichgewichtspunkt in $\bar{\sigma}$ mit $\bar{\varrho} > \nu$ und $\bar{\eta} > \nu$. Dann gilt:

(1.17) $a(\varrho,\bar{\eta}) = a(\bar{\varrho},\bar{\eta})$ für alle $\varrho \in P$

(1.18) $b(\bar{\varrho},\eta) = b(\bar{\varrho},\bar{\eta})$ für alle $\eta \in Q$.

Der Beweis ergibt sich als Spezialfall von Satz 1.3 .

Existiert also ein Gleichgewichtspunkt $(\bar{\varrho},\bar{\eta})$ mit $\bar{\varrho} > \nu$, $\bar{\eta} > \nu$, und spielt einer der Spieler seine streng gemischte Gleichgewichtsstrategie, so hat sein Gegenspieler keinen Einfluß mehr auf die eigene Auszahlung.

Im folgenden sollen Bedingungen angegeben werden, nach welchen eine Strategie einer anderen vorzuziehen ist. Sei $\bar{\Gamma} = (P,Q;a,b)$, ferner sei $U \subset P$, $V \subset Q$, $\varrho_1, \varrho_2 \in P$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in Q$.

DEFINITION 1.6:

(1) ϱ_1 <u>dominiert</u> ϱ_2 <u>bzgl. V</u> ($\varrho_1 \underset{(V)}{\rhd} \varrho_2$),

wenn $\bigwedge \sigma \in V$: $a(\varrho_1,\sigma) \geq a(\varrho_2,\sigma)$

und $\bigvee \sigma \in V$: $a(\varrho_1,\sigma) > a(\varrho_2,\sigma)$.

Für Spieler II werden also nur die Strategien $\sigma \in V$ in Betracht gezogen.

(2) σ_1 dominiert σ_2 bzgl. U ($\sigma_1 \underset{(U)}{\rhd} \sigma_2$),

wenn $\bigwedge \varrho \in U$: $b(\varrho,\sigma_1) \geq b(\varrho,\sigma_2)$

und $\bigvee \varrho \in U$: $b(\varrho,\sigma_1) > b(\varrho,\sigma_2)$.

Die Strategie ϱ_1 dominiert also ϱ_2 bzgl. V genau dann, wenn für mindestens ein $\sigma \in V$ die Auszahlung an Spieler I bei Einsatz von ϱ_1 höher ist als bei Einsatz von ϱ_2, für beliebiges $\sigma \in V$ die Auszahlung an Spieler I bei Einsatz von ϱ_1 mindestens so hoch ist wie bei Einsatz von ϱ_2. Die Strategie σ_1 dominiert andererseits σ_2 genau dann, wenn für mindestens ein $\varrho \in U$ die Auszahlung an Spieler II bei Einsatz von σ_1 höher ist als bei Einsatz von σ_2, für beliebiges $\varrho \in U$ die Auszahlung an Spieler II bei Einsatz von σ_1 mindestens so hoch ist wie bei Einsatz von σ_2.

Dazu beweist man

1.4:

Sei $X \subset U \subset P$, $Y \subset V \subset Q$. Dann gilt:

a) $\varphi_1 \underset{(V)}{\rhd} \varphi_2 \iff \varphi_1 \underset{(Y)}{\rhd} \varphi_2$

b) $\sigma_1 \underset{(U)}{\rhd} \sigma_2 \iff \sigma_1 \underset{(X)}{\rhd} \sigma_2$

Beweis:

a) Es gilt $\varphi_1 \underset{(V)}{\rhd} \varphi_2$.

Wegen $Y \subset V$ folgt nach Definition 1.6

$$a(\varphi_1, y) \geq a(\varphi_2, y) \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Angenommen, es gilt

$$a(\varphi_1, y) = a(\varphi_2, y) \quad \text{für alle } y \in Y \ ,$$

dann auch

$$a(\varphi_1, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} q_j a(\varphi_1, y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j a(\varphi_2, y_j) = a(\varphi_2, \sigma)$$

für jedes beliebige $\sigma \in V$, im Widerspruch zu $\varphi_1 \underset{(V)}{\rhd} \varphi_2$,

also $\varphi_1 \underset{(Y)}{\rhd} \varphi_2$.

Die Umkehrung kann man so beweisen:

Es gilt $\varphi_1 \underset{(Y)}{\rhd} \varphi_2$.

Daraus folgt für alle $\sigma \in V$:

$$a(\varphi_1, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} q_j a(\varphi_1, y_j)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} q_j a(\varphi_2, y_j) = a(\varphi_2, \sigma) \ .$$

Ferner sei o.B.d.A.

$$a(\varrho_1, y_k) > a(\varrho_2, y_k) .$$

Dann gilt für alle $\sigma = (q_1, \ldots, q_n) \in V$ mit $q_k > 0$:

$$a(\varrho_1, \sigma) = \sum_{j \neq k} q_j a(\varrho_1, y_j) + q_k a(\varrho_1, y_k)$$

$$> \sum_{j \neq k} q_j a(\varrho_2, y_j) + q_k a(\varrho_2, y_k) = a(\varrho_2, \sigma) ,$$

daraus folgt : $\varrho_1 \underset{(V)}{\triangleright} \varrho_2$.

Teil b) wird ganz entsprechend bewiesen.

Insbesondere gilt:

$$\varrho_1 \underset{(Q)}{\triangleright} \varrho_2 \Longleftrightarrow \varrho_1 \underset{(Y)}{\triangleright} \varrho_2$$

und

$$\sigma_1 \underset{(P)}{\triangleright} \sigma_2 \Longleftrightarrow \sigma_1 \underset{(X)}{\triangleright} \sigma_2 .$$

Für jeden der beiden Spieler ist es offenbar ungünstig, dominierte Strategien zu spielen. Daher liegt es nahe, Strategien, die als dominiert erkannt werden, zu eliminieren. Man sagt, die Strategiemenge des betreffenden Spielers wird reduziert.

Die formale Beschreibung der Reduktion von Strategiemengen der beiden Spieler erfolgt in

DEFINITION 1.7:

(1) Sei $P_1 \subset P$, $P_2 \subset P$ und $V \subset Q$.

Dann heißt P_1 <u>reduzierbar auf</u> P_2 <u>bzgl. V</u> ($P_1 \underset{(V)}{\supset} P_2$),

wenn gilt:

a) $P_1 \supsetneq P_2$,

b) zu jedem $\varphi_2 \in P_1 - P_2$ existiert ein $\varphi_1 \in P_2$ mit:

$\varphi_1 \underset{(V)}{\rhd} \varphi_2$.

(2) Ebenso sei $Q_1 \subset Q$, $Q_2 \subset Q$ und $U \subset P$.

Dann heißt Q_1 <u>reduzierbar auf</u> Q_2 <u>bzgl. U</u> ($Q_1 \underset{(U)}{\supset} Q_2$),

wenn gilt:

a) $Q_1 \supsetneq Q_2$,

b) zu jedem $\sigma_2 \in Q_1 - Q_2$ existiert ein $\sigma_1 \in Q_2$ mit:

$\sigma_1 \underset{(U)}{\rhd} \sigma_2$.

Beim Übergang von P_1 zu P_2 bzw. Q_1 zu Q_2 werden nur solche Strategien eliminiert, die von einer übrigbleibenden Strategie aus P_2 bzw. Q_2 dominiert werden.

Bemerkung:

Aus Satz 1.4 ergibt sich mit $X \subset U \subset P$ und $Y \subset V \subset Q$:

$$P_1 \underset{(V)}{\supset} P_2 \iff P_1 \underset{(Y)}{\supset} P_2$$

$$Q_1 \underset{(U)}{\supset} Q_2 \iff Q_1 \underset{(X)}{\supset} Q_2 \quad .$$

Reduziert man nun nach folgendem Prinzip:

$X \underset{(Y)}{\supset} X_1$ und existiert kein $X_1' \subset X_1$ mit $X_1 \underset{(Y)}{\supset} X_1'$, und weiter $Y \underset{(X_1)}{\supset} Y_1$ und existiert kein $Y_1' \subset Y_1$ mit $Y_1 \underset{(X_1)}{\supset} Y_1'$, dann $X_1 \underset{(Y_1)}{\supset} X_2$, und existiert kein $X_2' \subset X_2$ mit $X_2 \underset{(Y_1)}{\supset} X_2'$, und so fort, so erhält man schließlich, da X und Y endlich sind, nach endlich vielen Schritten eindeutig ein Teilspiel $(X_r,Y_r;a,b)$ und es existiert kein $X_{r+1} \subset X_r$ mit $X_r \underset{(Y_r)}{\supset} X_{r+1}$, und auch kein $Y_{r+1} \subset Y_r$ mit $Y_r \underset{(X_r)}{\supset} Y_{r+1}$, das Teilspiel $(X_r,Y_r;a,b)$ ist also nicht weiter reduzierbar.

Bezeichnet man die konvexe Hülle von X_r mit $P(X_r)$ und die konvexe Hülle von Y_r mit $Q(Y_r)$, so stellt das Spiel $(P(X_r),Q(Y_r);a,b)$ die gemischte Erweiterung des Teilspieles $(X_r,Y_r;a,b)$ dar.

DEFINITION 1.8:
Das Spiel $(P(X_r),Q(Y_r);a,b))$ heißt das <u>reduzierte Teilspiel</u> von $(P,Q;a,b)$.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß bei Reduktion einer Strategiemenge möglicherweise auch Gleichgewichtsstrategien des entsprechenden Spielers eliminiert werden. Dies wird gezeigt durch

Beispiel 2:
Gegeben sei das Nullsummen-Spiel $\bar{\sigma}_2 = (P,Q;a,-a)$ durch die Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wegen $x_2 \underset{(Y)}{\rhd} x_3$ reduziert man $X \underset{(Y)}{\ni} X_1 = \{x_1, x_2\}$ und

wegen $y_1 \underset{(X_1)}{\rhd} y_3$ reduziert man $Y \underset{(X_1)}{\ni} Y_1 = \{y_1, y_2\}$.

Bezeichnet man die Mengen der gemischten Strategien des reduzierten Spieles $(X_1, Y_1; a, -a)$ mit $P(X_1)$ bzw. $Q(Y_1)$, so sei $\bar{\sigma}'_2 := (P(X_1), Q(Y_1); a, -a)$ gegeben durch die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} .$$

Als einzigen Gleichgewichtspunkt von $\bar{\sigma}'_2$ erhält man $(\bar{\varrho}', \bar{\sigma}')$ mit $\bar{\varrho}' = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right) \in P(X_1)$

und $\bar{\sigma}' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in Q(Y_1)$.

Andererseits ist $(\bar{\varrho}, \bar{\sigma})$ mit $\bar{\varrho} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right) \in P$

und $\bar{\sigma} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \in Q$

auch Gleichgewichtspunkt in $\bar{\sigma}_2 = (P, Q; a, -a)$.

Da aber $\varrho' = \left(\frac{2}{5}, p, \frac{3}{5} - p \right)$ mit $\frac{4}{15} < p < \frac{3}{5}$

ebenfalls Gleichgewichtsstrategie des Spielers I in $\bar{\sigma}_2$ ist, ist auch $(\varrho', \bar{\sigma})$ Gleichgewichtspunkt in $\bar{\sigma}_2$.

DEFINITION 1.9:

(1) Sei $(P, Q; a, b)$ endliches Spiel.

(1) Dann heißt $x_i \in X$ <u>wesentliche Strategie für Spieler I</u>, wenn eine Gleichgewichtsstrategie $\bar{\varrho} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m) \in P$ existiert mit $\bar{p}_i > 0$.

(2) Entsprechend heißt $y_j \in Y$ <u>wesentliche Strategie für Spieler II</u>, wenn eine Gleichgewichtsstrategie $\bar{\sigma} = (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n) \in Q$ existiert mit $\bar{q}_j > 0$.

DEFINITION 1.10:

Das Spiel $(P(X_w), Q(Y_w); a, b)$ mit :

$X_w := \{ x \in X:$ x ist wesentliche Strategie für Spieler I$\}$

und $Y_w := \{ y \in Y:$ y ist wesentliche Strategie für Spieler II$\}$

heißt das wesentliche Teilspiel von $(P,Q;a,b)$.

Nachdem bei Reduktion des endlichen Spiels $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ auf $\sigma_n = (P_n,Q_n;a,b)$ Gleichgewichtsstrategien beider Spieler verloren gehen können, erhebt sich die Frage, ob im allgemeinen überhaupt Gleichgewichtsstrategien aus dem ursprünglichen Spiel erhalten bleiben, oder ob im reduzierten Spiel zwar die Eigenschaft, endliches Spiel zu sein, erhalten bleibt, aber völlig neue Gleichgewichtsstrategien für jeden der beiden Spieler auftreten. Darüber gibt Auskunft der folgende

SATZ 1.5:

Sei $(P,Q;a,b)$ ein endliches Spiel und außerdem gilt $P \underset{(Q)}{\supset} P_1$.

Dann ist jeder Gleichgewichtspunkt von $(P_1,Q;a,b)$ auch Gleichgewichtspunkt von $(P,Q;a,b)$.

Beweis:

Aus $P \supset P_1$ folgt

$$(1.19) \quad \max_{\varphi \in P} a(\varphi,\eta) \geq \max_{\varphi \in P_1} a(\varphi,\eta) \quad \text{für alle } \eta \in Q .$$

Wegen $P \underset{(Q)}{\supset} P_1$ existiert ferner zu jedem $\varphi \in P$ ein $\varphi_1 \in P_1$, so daß gilt:

$$a(\varphi_1,\eta) \geq a(\varphi,\eta) \quad \text{für alle } \eta \in Q$$

und damit

$$(1.20)\qquad \max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma) \leq \max_{\varrho\in P_1} a(\varrho,\sigma) \quad \text{für alle } \sigma\in Q\ .$$

Aus (1.19) und (1.20) folgt:

$$(1.21)\qquad \max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma) = \max_{\varrho\in P_1} a(\varrho,\sigma) \quad \text{für alle } \sigma\in Q\ .$$

Sei $(\bar{\varrho},\bar{\sigma})$ Gleichgewichtspunkt in $(P_1,Q;a,b)$; dann gilt mit (1.6) und (1.21) :

$$(1.22):\qquad a(\bar{\varrho},\bar{\sigma}) = \max_{\varrho\in P_1} a(\varrho,\sigma) = \max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma)\ ,$$

ferner mit (1.7)

$$(1.23)\qquad b(\bar{\varrho},\bar{\sigma}) = \max_{\sigma\in Q} b(\bar{\varrho},\sigma)\ .$$

Aus (1.22) und (1.23) folgt die Behauptung.

KOROLLAR 1.5.1:

Sei $(P,Q;a,b)$ endliches Spiel. Dann ist jeder Gleichgewichtspunkt im reduzierten Spiel $(P(X_r),Q(Y_r);a,b)$ auch Gleichgewichtspunkt in $(P,Q;a,b)$.

Der Beweis ergibt sich durch Anwendung von Satz 1.5 auf jeden Reduktionsschritt.

SATZ 1.6 :

Das wesentliche Teilspiel eines endlichen Spiels $(P,Q;a,b)$ ist nicht reduzierbar.

Beweis:

Angenommen, X_w wäre bzgl. Y_w auf X_o reduzierbar.

Dann gilt $X_w \supset X_o$ und zu jedem $x_s \in X_w - X_o$ existiert ein $\varphi(x_s) \in P(x_o)$, so daß gilt:

1.24) $a(\varphi(x_s),y_k) > a(x_s,y_k)$ für mindestens ein $y_k \in Y_w$

$a(\varphi(x_s),y) \geq a(x_s,y)$ für alle $y \in Y_w$.

Andererseits besitzt jeder der beiden Spieler im Spiel $(P(X_w),Q(Y_w)\ ;\ a,b)$ eine streng gemischte Gleichgewichtsstrategie $\bar{\varphi} \in P(X_w)$ bzw. $\bar{\sigma} \in Q(Y_w)$. Dann gilt nach Korollar 1.3.1 die Gleichung (1.17) für alle $\varphi \in P(X_w)$.

Nach (1.24) folgt:

$$a(\varphi(x_s),\bar{\sigma}) = \sum_{j \neq k} \bar{q}_j a(\varphi(x_s),y_j) + \bar{q}_k a(\varphi(x_s),y_k)$$

$$> \sum_{j \neq k} \bar{q}_j a(x_s,y_j) + \bar{q}_k a(x_s,y_k)$$

$$= a(x_s,\bar{\sigma}) \quad ,$$

im Widerspruch zu (1.17).

Dann ist X_w bzgl. Y_w nicht reduzierbar.

Ebenso zeigt man, daß auch Y_w bzgl. X_w nicht weiter reduzierbar ist.

2.) Aussagen über die Strategienräume der Spieler

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen sind die in (1.1) und (1.2) definierten Strategienräume der beiden Spieler. Ein Zusammenhang zwischen diesen Strategienräumen ist durch die Auszahlungsfunktionen gegeben. Man kann auf Q die folgenden Mengen definieren:

$$(2.1)\quad Q_a(\varrho') := \{\sigma \in Q: a(\varrho',\sigma) = \max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma)\}$$

$$(2.2)\quad Q_b(\varrho') := \{\sigma \in Q: b(\varrho',\sigma) = \min_{\varrho\in P} b(\varrho,\sigma)\},$$

wobei $\varrho' \in P$.

Entsprechend definiert man

$$(2.3)\quad P_b(\sigma') := \{\varrho \in P: b(\varrho,\sigma') = \max_{\sigma\in Q} b(\varrho,\sigma)\}$$

$$(2.4)\quad P_a(\sigma') := \{\varrho \in P: a(\varrho,\sigma') = \min_{\sigma\in Q} a(\varrho,\sigma)\},$$

wobei $\sigma' \in Q$.

Damit gilt:

$$(2.5)\quad Q = \bigcup_{\varrho\in P} Q_a(\varrho) = \bigcup_{\varrho\in P} Q_b(\varrho)$$

$$(2.6)\quad P = \bigcup_{\sigma\in Q} P_b(\sigma) = \bigcup_{\sigma\in Q} P_a(\sigma) \quad .$$

Bevor nun Aussagen über die in (2.1) - (2.4) erklärten Mengen bewiesen werden, sollen einige Definitionen angegeben werden, die die Formulierung der folgenden Sätze erleichtern.

DEFINITION 2.1:

Eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn mit $z_1, z_2 \in M$ auch $z := tz_1 + (1-t)z_2$ mit $0 \leq t \leq 1$ Element von M ist.

Aus der linearen Algebra bekannt ist

DEFINITION 2.2:

Die Punkte $z_0, \ldots, z_k$ des $\mathbb{R}^n$ heißen unabhängige Punkte hinsichtlich z_0, wenn die Vektoren $z_i - z_o$ für $i=1,\ldots,k$ linear unabhängig sind.

Dann gilt

SATZ 2.1:

Die Punkte $z_0, \ldots, z_k$ des $\mathbb{R}^n$ seien unabhängig hinsichtlich z_0. Dann sind die Vektoren $z_i - z_o$ für $i=1,\ldots,k$ genau dann linear unabhängig, wenn für beliebiges festes $j \in \{0,\ldots,k\}$ die Vektoren $z_i - z_j$ für alle $i=0,\ldots,k$ und $i \neq j$ linear unabhängig sind.

Beweis:

(1) Für $j=0$ ist die Behauptung trivial.

(2) Sei $j \neq 0$ und $t_i \in \mathbb{R}$ für $i=1,\ldots,k$, sowie $\sum_{i=1}^{k} t_i =: -t_o$, dann gilt:

$$(2.7) \quad \sum_{i=1}^{k} t_i(z_i - z_o) = \sum_{i=1}^{k} t_i z_i - \sum_{i=1}^{k} t_i z_o =$$

$$\sum_{i=0}^{k} t_i z_i = \sum_{i \neq j} t_i z_i + t_j z_j = \sum_{i \neq j} t_i (z_i - z_j)$$

für beliebiges $j \in \{1,\ldots,k\}$.

Sind die Vektoren $z_i - z_o$ für $i = 1,\ldots,k$ linear unabhängig, so folgt aus

$$\sum_{i=1}^{k} t_i(z_i - z_o) = \mathcal{O},$$

daß auch $t_i = 0$ für alle $i = 1,\ldots,k$ und damit $t_o = 0$ ist. Aus (2.7) ergibt sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $z_i - z_j$ für beliebiges $j \in \{1,\ldots,k\}$.
Die Umkehrung erhält man, indem man die Indizes 0 und j vertauscht und den gleichen Schluß vollzieht.

Zu Definition 2.2 sei daher folgendes bemerkt:
Sind die Punkte $z_o,\ldots,z_k$ des $\mathbb{R}^n$ unabhängig hinsichtlich z_o, dann sind sie auch unabhängig hinsichtlich z_j für beliebiges $j \in \{1,\ldots,k\}$, man sagt, sie sind <u>unabhängig</u>.

DEFINITION 2.3:
Ein von den Punkten $z_o,\ldots,z_k \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq k \leq n$ aufgespannter linearer Raum, d.h. ein linearer Raum, der alle Punkte der Form $\sum_{i=0}^{k} t_i z_i$ mit $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ und $t_i \in \mathbb{R}$ enthält, heißt von der <u>Dimension k</u>, wenn $z_o,\ldots,z_k$ unabhängig sind.

DEFINITION 2.4:
Eine nichtleere konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ habe die <u>Dimension k</u> mit $0 \leq k \leq n$, wenn sie Teilmenge eines k-dimensionalen linearen Raumes, aber nicht Teilmenge eines (k-1) -dimensionalen linearen Raumes ist, d.h.wenn ihre lineare Hülle L(M) die Dimension k hat.
Man schreibt: $\dim M = k$.

Dazu sei bemerkt:

$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \dim M_1 \leq \dim M_2$ für M_1, M_2 konvex.

Im folgenden werden einige Definitionen und Bemerkungen aus der Topologie auf die hier interessierenden Probleme übertragen, vgl. dazu I5I, Seite 15 - 18 oder auch I12I, Seite 11 - 17 .

Bezeichnung:

Für zwei Punkte $x,y \in \mathbb{R}^n$ mit $x=(x_1,\ldots,x_n)$ und $y=(y_1,\ldots,y_n)$ bezeichnet

$$(2.8) \qquad d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

den euklidischen Abstand.

DEFINITION 2.5:

Ist $z_o \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $\varepsilon > 0$, so heißt

$$(2.9) \qquad U(z_o,\varepsilon) := \{ z \in \mathbb{R}^n : d(z_o,z) < \varepsilon \}$$

die <u>offene ε-Umgebung von z_o</u>. Eine Teilmenge $U(z_o)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt <u>Umgebung von z_o</u>, wenn sie eine offene ε-Umgebung von z_o umfaßt.

DEFINITION 2.6:

Es sei M eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(1) Ein Punkt $z_o \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>innerer</u> Punkt von M, wenn es bzgl. der vom $\mathbb{R}^n$ in L(M) induzierten Topologie eine Umgebung $U(z_o)$ von z_o gibt mit $U(z_o) \subset M$.

(2) Die Menge aller so definierten inneren Punkte von M heißt der <u>offene Kern</u> von M und wird mit $\overset{o}{M}$ bezeichnet.

(2) Ein Punkt $z_1 \in \mathbb{R}^n$ heißt äußerer Punkt von M, wenn es eine Umgebung $U(z_1)$ von z_1 gibt mit: $U(z_1) \subset \mathbb{R}^n - M$.

(3) Ein Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von M, wenn z weder innerer noch äußerer Punkt von M ist.
Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M und wird mit Rd M bezeichnet.

Bezüglich der Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ zerfallen die Punkte des $\mathbb{R}^n$ in drei Klassen: innere, äußere und Randpunkte von M.

DEFINITION 2.7:
Eine abgeschlossene Menge M heißt ein konvexes Polyeder, wenn sie sich als Durchschnitt von endlich vielen durch Hyperebenen begrenzten Halbräumen darstellen läßt.

SATZ 2.2:
Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polyeder mit $\dim P = k \geq 1$
Der Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann innerer Punkt von P, wenn $k+1$ unabhängige Punkte $z_0, \ldots, z_k$ aus P existieren mit:

$$(2.10) \quad z = \sum_{i=0}^{k} t_i z_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \quad \text{und} \quad t_i > 0$$

für alle $i=0,\ldots,k$.

Beweis:

(1) Es gilt (2.10) und $z_0, \ldots, z_k$ seien unabhängige Punkte aus P. Der offene Kern der konvexen Hülle von $z_0, \ldots, z_k$ (vgl. dazu Definition 2.6) enthält z und ist andererseits wegen $z_i \in \overset{o}{P}$ für alle $i = 0,\ldots,k$ Teilmenge von $\overset{o}{P}$. Daraus folgt $z \in \overset{o}{P}$.

(2) Sei $z \in \overset{o}{P}$.

Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach der Dimension k:

Für k=1 ist P ein abgeschlossenes Intervall von $\mathbb{R}$ mit den Randpunkten x_o und x_1. Dann gilt wegen $z \in \overset{o}{P}$ und der Konvexität von P die Gleichung

$$z = t_o x_o + (1-t_o)x_1 \quad \text{mit } 0 < t_o < 1 .$$

Nimmt man an, die Behauptung sei für k-1 bewiesen, und sei dim P = k.

Dann existiert zu $z \in \overset{o}{P}$ bzgl. der vom $\mathbb{R}^n$ in L(P) induzierten Topologie eine Kugelumgebung $U(z,\varepsilon) \subset P$ mit $U(z,\varepsilon) = \{z' : d(z,z') < \varepsilon\}$ und $z = (z_1,\ldots,z_n)$ ist Mittelpunkt dieser Umgebung. Ferner sind die Punkte

$$x := (z_1,\ldots,z_{n-1},z_n+\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$\text{und } x_o := (z_1,\ldots,z_{n-1},z_n-\tfrac{\varepsilon}{2})$$

innere Punkte von $U(z,\varepsilon)$ und es gilt:

$$(2.11) \qquad z = \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} x_o \quad .$$

Sei

$$H := \{ y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n = z_n + \tfrac{\varepsilon}{2} \}$$

eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$; dann ist $U(z,\varepsilon) \cap H$ bzgl. der vom $\mathbb{R}^n$ in $L(H \cap P)$ induzierten Topologie eine Kugelumgebung von x, also gilt $x \in \overset{o}{P \cap H}$ oder nach Induktionsannahme:

(2.12) $x = \sum_{i=1}^{k} s_i x_i$ mit $\sum_{i=1}^{k} s_i = 1$ und $s_i > 0$ für alle $i = 1,\ldots,k$.

Ferner sind die Punkte $x_i := (x_{i1},\ldots,x_{in-1},z_n+\frac{\varepsilon}{2})$ unabhängige Punkte von $P \cap H$ und damit auch unabhängige Punkte von P.

Aus (2.11) und (2.12) ergibt sich

(2.13) $z = \sum_{i=o}^{k} t_i x_i$ mit $t_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i=0 \\ \frac{1}{2} s_i & \text{sonst} \end{cases}$.

Also gilt $t_i > 0$ für alle $i = 0,\ldots,k$ und

$$\sum_{i=o}^{k} t_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=o}^{k} s_i = 1 ,$$

ferner sind $x_o,\ldots,x_k$ nach Definition unabhängig, daraus folgt die Behauptung.

SATZ 2.3:

Sei P ein konvexes Polyeder. Dann gilt:

a) $\dim P = 0 \longrightarrow \overset{o}{P} = \emptyset$,

b) $P \neq \emptyset$ und $\overset{o}{P} = \emptyset \longrightarrow \dim P \quad 0$.

Beweis:

a) P besteht aus einem Punkt, daraus folgt nach Definition 2.6 : P enthält keinen inneren Punkt.

b) Nimmt man an, es gilt $z_1, z_2 \in P$ und $z_1 \neq z_2$, so gehört wegen der Konvexität von P jedes $z := tz_1 + (1-t)z_2$ mit $0<t<1$ zu P. Andererseits ist z nach Satz 2.2 sogar innerer Punkt von P im Widerspruch zu $\overset{o}{P} = \emptyset$. Also enthält P genau einen Punkt, es gilt $\dim P = 0$.

In den folgenden Sätzen dieses Abschnitts werden Aussagen formuliert, deren Beweise entsprechend für die Mengen $Q_b(\varphi)$, $P_a(\sigma)$, $P_b(\sigma)$ wie für $Q_a(\varphi)$ verlaufen, man kann sich darauf beschränken, die folgenden Betrachtungen nur für $Q_a(\varphi)$ durchzuführen.

Bemerkt sei ferner, daß im gesamten Verlauf dieses Abschnitts nur vorausgesetzt wird, $(P,Q;a,b)$ ist endliches Spiel.

SATZ 2.4:

Sei $Q_a(\varphi') \neq \emptyset$.

Dann ist $Q_a(\varphi')$ abgeschlossen, konvex und höchstens $(n-1)$ -dimensional.

Beweis:

Die Menge $Q_a(\varphi')$ ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Nimmt man an, σ^* sei Häufungspunkt von $Q_a(\varphi')$ mit $\sigma^* \notin Q_a(\varphi')$, dann existiert ein $\varphi(\sigma^*)$ mit:

$$\max_{\varphi \in P} a(\varphi,\sigma^*) = a(\varphi(\sigma^*),\sigma^*) > a(\varphi',\sigma^*) .$$

Dann gibt es bzgl. der vom $\mathbb{R}^n$ in $L(Q)$ induzierten Topologie eine ε-Umgebung $U(\sigma^*,\varepsilon) \subset Q$ zu σ^*, so daß für alle $\sigma \in U(\sigma^*,\varepsilon)$ gilt:

$$a(\varphi(\sigma^*),\sigma) > a(\varphi',\sigma) ,$$

damit ist $U(\sigma^*,\varepsilon) \cap Q_a(\varphi') = \emptyset$ im Widerspruch zu der Annahme, daß σ^* Häufungspunkt von $Q_a(\varphi')$ ist. Also enthält $Q_a(\varphi')$ alle seine Häufungspunkte und ist damit abgeschlossen.

Seien $\eta_1, \eta_2 \in Q_a(\xi')$ und $\eta := t\eta_1 + (1-t)\eta_2$ mit $0<t<1$.

Dann gilt:

$$a(\xi',\eta) = ta(\xi',\eta_1) + (1-t)a(\xi',\eta_2)$$

$$ta(\xi,\eta_1) + (1-t)a(\xi,\eta_2) = a(\xi,\eta)$$

für alle $\xi \in P$,

also gilt $\eta \in Q_a(\xi')$ und damit ist $Q_a(\xi')$ konvex.

Es gilt : $\dim Q = n-1$.

Wegen $Q \supset Q_a(\xi')$ für alle $\xi' \in P$ nach (2.5) folgt daraus

$\dim Q_a(\xi') \leq \dim Q = n-1$.

SATZ 2.5:

Sei $\xi' := (p'_1,\ldots,p'_m) \in P$. Dann gilt:

$$Q_a(\xi') = \bigcap_{i:p'_i>0} Q_a(x_i)$$

Beweis:

Sei $\eta \in \bigcap_{i:p'_i>0} Q_a(x_i)$, dann folgt daraus

$$\max_{\xi\in P} a(\xi,\eta) = a(x_i,\eta) \quad \text{für alle } i:p'_i>0 ,$$

und damit

$$\max_{\xi\in P} a(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} p'_i\, a(x_i,\eta) = a(\xi',\eta) ,$$

also gilt mit $\eta \in Q_a(\xi')$

$$\bigcap_{i:p'_i>0} Q_a(x_i) \subset Q_a(\xi') .$$

Sei $\eta \in Q_a(\xi')$, dann folgt daraus

$$\max_{\xi\in P} a(\xi,\eta) = a(\xi',\eta)$$

und damit

$$\max_{\varrho \in P} a(\varrho,\sigma) = a(x_i,\sigma) \quad \text{für alle } i:p_i'>0 .$$

Andernfalls gäbe es ein $x_i \in X$ mit $i \in \{i:p_i'>0\}$ und ein $x_s \in X$ mit $s \in \{1,\ldots,m\}$, so daß gilt:

$$a(x_i,\sigma) < a(x_s,\sigma) .$$

Daraus würde folgen:

$$\begin{aligned} a(\varrho',\sigma) &= \sum_{j:p_j'>0} p_j' a(x_j,\sigma) = \\ &= \sum_{j\neq i} p_j' a(x_j,\sigma) + p_i' a(x_i,\sigma) \\ &< \sum_{j\neq i} p_j' a(x_j,\sigma) + p_i' a(x_s,\sigma) = a(\varrho'',\sigma) . \end{aligned}$$

wobei $\varrho'' = (p_1'',\ldots,p_m'')$ ist mit $p_j'' = \begin{cases} 0 & \text{für } j=i \\ p_j'+p_i' & \text{für } j=s \\ p_j' & \text{sonst} \end{cases}$.

Da wegen $p_j'' \geq 0$ für alle $j = 1,\ldots,m$ und

$$\sum_{i=1}^{m} p_i'' = \sum_{i\neq j\neq s} p_j' + p_s' + p_i' = 1$$

der Vektor ϱ'' eine Strategie aus P darstellt, hat man einen Widerspruch zur Voraussetzung, daraus folgt mit

$$\sigma \in \bigcap_{i:p_i'>0} Q_a(x_i) \text{ auch } Q_a(\varrho') \subset \bigcap_{i:p_i'>0} Q_a(x_i) .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 2.5 läßt sich auch so formulieren:

KOROLLAR 2.5.1:

$$\max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma) = a(\varrho',\sigma) \text{ mit } \varrho' \in P \Longleftrightarrow \max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma) = a(x_i,\sigma)$$
$$\text{für alle } i:p_i'>0 .$$

Überhin enthält Satz 2.5 wichtige Spezialfälle:

KOROLLAR 2.5.2:

a) $P \ni \varphi > \sigma \Longrightarrow Q_a(\varphi) = \bigcap_{x \in X} Q_a(x)$,

b) $\varphi \in P \Longrightarrow \bigvee x \in X: Q_a(x) \supset Q_a(\varphi)$,

c) Aus (2.5) und b) folgt: $Q = \bigcup_{x \in X} Q_a(x)$.

SATZ 2.6:

Sei $\varphi \in P$ und $Q_a(\varphi) \neq \emptyset$. Dann ist $Q_a(\varphi)$ konvexes Polyeder.

Beweis:

Für beliebiges $x_i \in X$ gilt:

$$Q_a(x_i) = \bigcap_{j=1}^{n} \{\eta \in \mathbb{R}^n: q_j \geq 0\} \cap \bigcap_{j=1}^{m} \{\eta \in \mathbb{R}^n: a(x_i, \eta) \geq a(x_j, \eta)\}$$

$$\cap \{\eta \in \mathbb{R}^n: \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\}$$

$$=: C \cap \{\eta \in \mathbb{R}^n: \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\} .$$

Wegen $m,n \in \mathbb{N}$ ist C als Durchschnitt endlich vieler Halbräume ein konvexes Polyeder, damit ist auch $Q_a(x_i)$ ein konvexes Polyeder.
Nach Satz 2.5 ist jedes $Q_a(\varphi) \neq \emptyset$ der Durchschnitt endlich vieler Polyeder, daraus folgt die Behauptung.

SATZ 2.7:

Seien M,N konvexe Polyeder mit $M \subset N$ und $\dim M = \dim N = k \geq 1$ und sei $z \in N-M$. Dann existieren $z_1, z_2 \in M$, so daß gilt:
$z_0 = tz + (1-t)z_1$ und $0 < t < 1$.

Beweis:

Zu beliebigem $z \in N-M$ existiert ein $z_1 \in \overset{o}{M}$, so daß z und z_1 auf einer Geraden liegen. Mit $z_1 \in \overset{o}{M}$ existiert bzgl. der vom $\mathbb{R}^n$ in L(M) induzierten Topologie eine Umgebung $U(z_1,\varepsilon)$ mit $U(z_1,\varepsilon) \subset M$. Dann gibt es wegen dim $M \geq 1$ ein von z_1 verschiedenes z_2 mit $z_2 \in U(z_1,\varepsilon)$, so daß z_2 auf der Strecke $\overline{zz_1}$ mit den Endpunkten z und z_1 liegt, also gilt $z_2 = tz + (1-t)z_1$ mit $0<t<1$.

SATZ 2.8:

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in P$ und dim $Q_a(\varphi_1) >$ dim $Q_a(\varphi_2) \geq 0$.

Dann gilt:

a) $\overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_1)}} \cap Q_a(\varphi_2) = \emptyset$,

b) $Q_a(\varphi_1) \not\supset Q_a(\varphi_2) \Longrightarrow Q_a(\varphi_1) \cap \overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_2)}} = \emptyset$

Beweis:

a) Sei dim $Q_a(\varphi_1) = k > 0$ und $\eta' \in \overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_1)}}$.

Dann existieren unabhängige Punkte $\eta_0,\ldots,\eta_k \in Q_a(\varphi_1)$

mit $\eta' = \sum_{i=0}^{k} t_i\eta_i$, sowie $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ und $t_i > 0$ für alle i .

Wegen dim $Q_a(\varphi_2) < k$ existiert ein $i_0 \in \{0,\ldots,k\}$, o.B.d.A. sei $i_0=0$, so daß $\eta_0 \notin Q_a(\varphi_2)$, also gibt es ein $\varphi \in P$ mit $a(\varphi_2,\eta_0) < a(\varphi,\eta_0)$, andererseits ist $a(\varphi_1,\eta_0) \geq a(\varphi,\eta_0)$ für alle $\varphi \in P$, daraus folgt:

(2.14) $a(\varphi_1,\eta_0) > a(\varphi_2,\eta_0)$.

Für alle i = 1,...,k gilt ferner:

(2.15) $a(\varphi_1,\eta_i) \geq a(\varphi_2,\eta_i)$.

Aus (2.14) und (2.15) ergibt sich:

$$(2.16)\quad a(\varphi_1,\eta') = a(\varphi_1, \sum_{i=0}^{k} t_i\eta_i) > a(\varphi_2, \sum_{i=0}^{k} t_i\eta_i) = a(\varphi_2,\eta') ,$$

also $\eta' \notin Q_a(\varphi_2)$.

b) Gilt $Q_a(\varphi_1) \not\supset Q_a(\varphi_2)$, so existiert ein $\eta'' \in Q_a(\varphi_2)$ mit $\eta'' \notin Q_a(\varphi_1)$. Damit gilt:

$$a(\varphi_2,\eta'') \geq a(\varphi,\eta'') \quad \text{für alle } \varphi \in P ,$$

andererseits existiert ein $\varphi \in P$ mit

$$a(\varphi_1,\eta'') < a(\varphi,\eta''),$$

also folgt:

$$(2.17)\quad a(\varphi_2,\eta'') > a(\varphi_1,\eta'') .$$

Im folgenden sei vorausgesetzt: $\dim Q_a(\varphi_2) \geq 1$.
Dann existiert zu beliebigem $\eta_0 \in \overset{\circ}{Q_a(\varphi_2)}$ mit $\eta_0 \neq \eta''$ wegen der Konvexität von $Q_a(\varphi_2)$ ein $\eta_1 \in Q_a(\varphi_2)$, so daß gilt:

$$\eta_0 = t\eta_1 + (1-t)\eta'' \text{ mit } 0<t<1$$
$$\text{und } a(\varphi_2,\eta_1) \geq a(\varphi_1,\eta_1) .$$

Daraus und mit (2.17) gilt die Abschätzung:

$$(2.18)\quad a(\varphi_2,\eta_0) = ta(\varphi_2,\eta_1) + (1-t)a(\varphi_2,\eta'') > ta(\varphi_1,\eta_1) + (1-t)q(\varphi_1,\eta'') = a(\varphi_1,\eta_0)$$

und damit ist $\eta_0 \notin Q_a(\varphi_1)$, Teil b) ist unter der Voraussetzung: $\dim Q_a(\varphi_2) \geq 1$ bewiesen.
Gilt hingegen $\dim Q_a(\varphi_2) = 0$, so folgt die Behauptung direkt aus Satz 2.3 a) .

SATZ 2.9:

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in P$ und $\dim Q_a(\varphi_1) = \dim Q_a(\varphi_2) \geq 0$.

Dann gilt :

$$Q_a(\varphi_1) \neq Q_a(\varphi_2) \Longrightarrow \begin{cases} Q_a(\varphi_1) \cap \overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_2)}} = \emptyset \\ \overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_1)}} \cap Q_a(\varphi_2) = \emptyset \end{cases}$$

Beweis:

(1) Ist $\dim Q_a(\varphi_1) = Qim\, Q_a(\varphi_2) = 0$, dann gilt nach Satz 2.3 a) :

$$\overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_1)}} = \overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_2)}} = \emptyset$$

und die Behauptung ist bewiesen.

(2) Sei $\dim Q_a(\varphi_1) = \dim Q_a(\varphi_2) = k > 0$, ferner sei

$\sigma' \in (Q_a(\varphi_1) \cap \overset{o}{\overbrace{Q_a(\varphi_2)}})$.

Zu zeigen ist dann: $Q_a(\varphi_1) = Q_a(\varphi_2)$.

Es existieren unabhängige Punkte $\sigma_0, \ldots, \sigma_k \in Q_a(\varphi_2)$, so daß gilt:

$$\sigma' = \sum_{i=0}^{k} t_i \sigma_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \quad \text{sowie} \quad t_i > 0 \quad \text{für alle } i.$$

Daraus folgt:

$$a(\varphi_2, \sigma') = a\Big(\varphi_2, \sum_{i=0}^{k} t_i \sigma_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} t_i a(\varphi_2, \sigma_i)$$

$$\geq \sum_{i=0}^{k} t_i a(\varphi_1, \sigma_i) = a(\varphi_1, \sigma'),$$

gleichzeitig gilt auch

$$a(\varphi_1, \sigma') = a(\varphi_2, \sigma'),$$

also

(2.19) $a(\mathfrak{g}_1,\eta_i) = a(\mathfrak{g}_2,\eta_i)$ für alle $i = 0,\ldots,k$.

Damit gilt für alle $i = 0,\ldots,k$:

$$\eta_i \in Q_a(\mathfrak{g}_1) \Longrightarrow \eta' \in \overset{o}{\overline{Q_a(\mathfrak{g}_1)}} \quad .$$

Nach (2.19) enthält der Durchschnitt $Q_a(\mathfrak{g}_1) \cap Q_a(\mathfrak{g}_2)$ die Punkte $\eta_0,\ldots,\eta_k$, also $\dim (Q_a(\mathfrak{g}_1) \cap Q_a(\mathfrak{g}_2)) = k$

a) Sei $C := Q_a(\mathfrak{g}_1) \cap Q_a(\mathfrak{g}_2)$ echte Teilmenge von $Q_a(\mathfrak{g}_1)$, dann existieren nach Satz 2.7 zu beliebigem $\eta \in Q_a(\mathfrak{g}_1) - C$ Elemente $\eta'', \eta''' \in C$, so daß gilt:

$$\eta'' = t\eta + (1-t)\eta''' \text{ mit } 0<t<1 \ .$$

Man schätzt wieder ab:

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{g}_1,\eta'') &= ta(\mathfrak{g}_1,\eta) + (1-t)a(\mathfrak{g}_1,\eta''') \\ &\geqslant ta(\mathfrak{g}_2,\eta) + (1-t)a(\mathfrak{g}_2,\eta''') = a(\mathfrak{g}_2,\eta''). \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen $\eta'', \eta''' \in C$ sogar

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{g}_1,\eta'') &= a(\mathfrak{g}_2,\eta'') \\ a(\mathfrak{g}_1,\eta''') &= a(\mathfrak{g}_2,\eta''') \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a(\mathfrak{g}_1,\eta) = a(\mathfrak{g}_2,\eta)$$

und damit $\eta \in Q_a(\mathfrak{g}_2)$ im Widerspruch zu $\eta \in Q_a(\mathfrak{g}_1) - C$, also gilt $Q_a(\mathfrak{g}_1) - C = \emptyset$ oder

$$Q_a(\mathfrak{g}_1) = Q_a(\mathfrak{g}_2) = C \ .$$

b) Ebenso führt man die Annahme, C sei eine echte Teilmenge von $Q_a(\mathfrak{g}_2)$, zum Widerspruch.

Aus Symmetriegründen verläuft der Beweis analog, falls man in (2) voraussetzt: $\eta' \in (\overset{o}{\overline{Q_a(\mathfrak{g}_1)}} \cap Q_a(\mathfrak{g}_2))$.

Das Ergebnis von Satz 2.9 sei nochmals zusammengefaßt:
Liegt ein innerer Punkt von $Q_a(\varrho_1)$ bzw. von $Q_a(\varrho_2)$ im Durchschnitt $Q_a(\varrho_1) \cap Q_a(\varrho_2)$, so gilt $Q_a(\varrho_1) = Q_a(\varrho_2)$.
Aus $Q_a(\varrho_1) \neq Q_a(\varrho_2)$ folgt umgekehrt:
$Q_a(\varrho_1)$ enthält keinen inneren Punkt von $Q_a(\varrho_2)$, sowie $Q_a(\varrho_2)$ keinen inneren Punkt von $Q_a(\varrho_1)$.

SATZ 2.10:
Sei $x_s \in X$ mit dim $Q_a(x_s) < n-1$.
Dann gilt: $$Q = \bigcup_{i \neq s} Q_a(x_i) .$$

Beweis:
Angenommen, für alle $i = 1,\ldots,m$ mit $i \neq s$ gilt
$$Q_a(x_i) \not\supset Q_a(x_s) .$$
Für beliebiges $i \neq s$ gilt andererseits
entweder dim $Q_a(x_i) <$ dim $Q_a(x_s)$
oder dim $Q_a(x_i) =$ dim $Q_a(x_s)$
oder dim $Q_a(x_i) >$ dim $Q_a(x_s)$

a) Existiert ein $x_i \in X$ mit dim $Q_a(x_i) <$ dim $Q_a(x_s)$, so enthält $Q_a(x_i)$ nach Annahme und Satz 2.8 a) keinen inneren Punkt von $Q_a(x_s)$, also gilt:
(2.20) $a(x_s,\eta) > a(x_i,\eta)$ für alle $\eta \in \overset{\circ}{\overline{Q_a(x_s)}}$

b) Existiert ein $x_i \in X$ mit $i \neq s$ und dim $Q_a(x_i) =$ dim $Q_a(x_s)$, so enthält $Q_a(x_i)$ wegen $Q_a(x_i) \neq Q_a(x_s)$ nach Satz 2.9 keinen inneren Punkt von $Q_a(x_s)$, daraus folgt (2.20).

c) Für alle $x_i \in X$, die weder a) noch b) erfüllen, gilt:

dim $Q_a(x_i) >$ dim $Q_a(x_s)$. Dann gilt auch hier (2.20), da $Q_a(x_i)$ wegen $Q_a(x_i) \not\subset Q_a(x_s)$ nach Satz 2.8 b) keinen inneren Punkt von $Q_a(x_s)$ enthält.

Aus a), b), c) folgt:

Ein beliebiger innerer Punkt $\sigma\eta = (q_1,\ldots,q_n)$ von $Q_a(x_s)$ genügt dem Ungleichungssystem

$$(2.21)\quad \left\{ \begin{array}{lll} a(x_s,\sigma\eta) > a(x,\sigma\eta) & \text{für alle } x\in X & \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 & & \\ q_j \geqslant 0 & \text{für alle } j = 1,\ldots,n & \end{array} \right\}$$

O. B. d. A. sei $0 < q_n \leq 1$.

Ferner seien $\sigma\eta^i = (q_1{}^i,\ldots,q_n{}^i)$ für $i=1,\ldots,n-1$ Strategien mit

$$q_j{}^i = \left\{ \begin{array}{ll} q_j + \varepsilon q_n & \text{für } j=i \text{ und } 0<\varepsilon<1 \\ (1-\varepsilon)q_n & \text{für } j=n \text{ und } 0<\varepsilon<1 \\ q_j & \text{sonst} \end{array} \right. .$$

Betrachtet man die Vektorgleichung

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i(\sigma\eta^i - \sigma\eta) = \nu ,$$

so gilt wegen $\sigma\eta^i - \sigma\eta := (\, q_{i1},\ldots,q_{in}\,)$ mit

$$q_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon q_n & \text{für } j=i \\ -\varepsilon q_n & \text{für } j=n \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$$

und $0<\varepsilon<1$ sowie $q_n > 0$:

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-1} = 0 ,$$

also sind die Vektoren $\sigma\eta^1 - \sigma\eta, \ldots, \sigma\eta^{n-1} - \sigma\eta$ linear unabhängig.

Wählt man ϵ so klein, daß gilt:

$$a(x_s,\sigma^i) > a(x,\sigma^i) \quad \text{für alle } x\in X \text{ und } i=1,\ldots,n-1 ,$$

so sind die unabhängigen Punkte $\sigma, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1}$ Elemente von $Q_a(x_s)$ und man erhält mit

$$\dim Q_a(x_s) = n-1$$

einen Widerspruch zur Voraussetzung.
Es existiert also ein $x_i \neq x_s$ mit $Q_a(x_i) \supset Q_a(x_s)$.
Daraus folgt die Behauptung.

KOROLLAR 210.1:

$$Q = \bigcup_{i:\ \dim Q_a(x_i)=n-1} Q_a(x_i) .$$

Der Beweis ergibt sich direkt aus Satz 2.10. Denn falls $\dim Q_a(x_s) < n-1$, so existiert ein $x_i\in X$: $Q_a(x_i) \supset Q_a(x_s)$.
Daraus folgt die Behauptung.

SATZ 2.11:

Sei $\dim Q_a(x_i) \begin{cases} = n-1 & \text{für } i=1,\ldots,k \text{ und } k\leq m \\ \neq n-1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann gilt:

$$\dim \bigcup_{i=1}^{k} Q_a(x_i) \geq 1 \Longrightarrow Rd \bigcup_{i=1}^{k} Q_a(x_i) \subset Rd\ Q .$$

Beweis:
Bildet man die lineare Hülle von $C := \bigcup_{i=1}^{k} Q_a(x_i)$ und bezeichnet sie mit $L(C)$, so ist $K := L(C) \cap Q$ eine konvexe Obermenge der konvexen Menge C mit der Dimension

$d := \dim C \geq 1$ und $Rd\ K \subset Rd\ Q$.

Zu zeigen ist noch: $K = C$.

Nimmt man an, es existiert ein $\sigma_0 \in K-C$, so gibt es ein $i_0 \in \{1,\ldots,k\}$, o.B.d.A. sei $i_0=1$, so daß $\sigma_0 \notin Q_a(x_1)$, andererseits existiert nach Korollar 2.10.1 ein $i_1 \in \{1,\ldots,k\}$, o.B.d.A. sei $i_1 = 2$, so daß $\sigma_0 \in Q_a(x_2)$.

Also existiert ein $\varrho \in P$ mit $a(\varrho,\sigma_0) > a(x_1,\sigma_0)$ und für alle $\varrho \in P$ gilt: $a(x_2,\sigma_0) \geq a(\varrho,\sigma_0)$, daraus folgt:

(2.22) $\quad a(x_2,\sigma_0) > a(x_1,\sigma_0)$.

Wegen $\dim K = \dim C = d \geq 1$ kann man nach Satz 2.7 Punkte σ_1 und σ_2 aus C so wählen, daß σ_0, σ_1, σ_2 auf einer Geraden liegen mit:

$$\sigma_1 = t\sigma_0 + (1-t)\sigma_2 \quad \text{mit } 0<t<1 .$$

Weiter gilt

$$a(x_1,\sigma_1) = a(x_2,\sigma_2)$$

$$\text{und } a(x_1,\sigma_2) = a(x_2,\sigma_2) .$$

Andererseits erhält man mit (2.22) :

$$a(x_2,\sigma_1) = ta(x_2,\sigma_0) + (1-t)a(x_2,\sigma_2)$$

$$> ta(x_1,\sigma_0) + (1-t)a(x_1,\sigma_2) = a(x_1,\sigma_1) .$$

Dies ist ein Widerspruch, also $\sigma_0 \in C$ und damit $K = C$, daraus folgt die Behauptung.

3.) Hinreichende Bedingungen für dominierte Strategien

Auch in diesem Abschnitt wird mit geometrischen Mitteln gearbeitet. Ausgangspunkt ist nun der Raum $Q \times \mathbb{R}$ (bzw. $P \times \mathbb{R}$).

Teilmengen von $Q \times \mathbb{R}$ sind die folgenden Mengen:

$$(3.1) \quad A(\varphi') := \{ (\sigma, z) \in Q \times \mathbb{R} : z \geq a(\varphi', \sigma) \}$$

$$(3.2) \quad B(\varphi') := \{ (\sigma, z) \in Q \times \mathbb{R} : z \leq b(\varphi', \sigma) \}$$

SATZ 3.1:
Die Mengen $A(\varphi')$ und $B(\varphi')$ sind jeweils n-dimensionale konvexe Polyeder.

Beweis:
(1) Man definiert

$$(3.3) \quad C_j := \{ (\sigma, z) \in L(Q) \times \mathbb{R} : q_j \geq 0 \} \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n$$

$$(3.4) \quad Z(\varphi') := \{ (\sigma, z) \in L(Q) \times \mathbb{R} : z \geq a(\varphi', \sigma) \}$$

Nach (3.1) gilt:

$$(3.5) \quad A(\varphi') = \{ (\sigma, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq a(\varphi', \sigma) , \; q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0 , \; \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \}$$

$$= \{ (\sigma, z) \in L(Q) \times \mathbb{R} : z \geq a(\varphi', \sigma) , \; q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0 \}$$

$$= Z(\varphi') \cap \bigcap_{j=1}^{n} C_j \quad .$$

Also ist $A(\varphi')$ als Durchschnitt endlich vieler Halbräume darstellbar, damit ist $A(\varphi')$ konvexes Polyeder. Entsprechend verläuft der Beweis für $B(\varphi')$.

(2) Mit dim Q = dim L(Q) = n-1 folgt:

$$\dim L(A(\varphi')) = \dim \{(\sigma,z)\in L(Q)\times\mathbb{R}\} = n .$$

Daraus folgt nach Definition 2.4 :

$$\dim A(\varphi') = n$$

$$(3.6)\quad A_o(\varphi') := \{(\sigma,z)\in Q\times\mathbb{R}:\ z = a(\varphi',\sigma)\}$$

$$(3.7)\quad B_o(\varphi') := \{(\sigma,z)\in Q\times\mathbb{R}:\ z = b(\varphi',\sigma)\}$$

DEFINITION 3.1:

Sei M eine konvexe und k-dimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt H eine <u>Hyperebene in M</u>, wenn es eine Hyperebene H' im $\mathbb{R}^n$ gibt mit den Eigenschaften:

(1) $H = M\cap H'$

(2) $\dim (M\cap H') = k-1$.

Damit sind die Mengen $A_o(\varphi')$ und $B_o(\varphi')$ (vgl. (3.6) und (3.7)) Hyperebenen in $Q\times\mathbb{R}$.

$$(3.8)\quad A(P) := \bigcap_{\varphi\in P} A(\varphi)$$

$$(3.9)\quad B(P) := \bigcap_{\varphi\in P} B(\varphi)$$

SATZ 3.2:

Die Mengen A(P) und B(P) sind n-dimensionale, konvexe Polyeder.

Beweis:

(1) Wegen $\max\limits_{\varphi\in P} a(\varphi,\sigma) = \max\limits_{x\in X} a(x,\sigma)$ für beliebiges $\sigma\in Q$ (nach Korollar 2.1) ist A(P) darstellbar:

$$(3.10)\quad A(P) = \bigcap_{\varrho\in P} A(\varrho) = \{(\sigma,z)\in Q\times\mathbb{R}:\ z \geq \max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma)\}$$

$$= \{(\sigma,z)\in Q\times\mathbb{R}:\ z \geq \max_{x\in X} a(x,\sigma)\} = \bigcap_{x\in X} A(x)\ .$$

Damit ist A(P) als Durchschnitt endlich vieler konvexer Polyeder ebenfalls ein konvexes Polyeder.

(2) Wegen $\max_{\varrho\in P} a(\varrho,\sigma) < \infty$ und (3.10) gilt:

$$\dim A(P) = n\ .$$

Analog verläuft der Beweis für B(P) .

DEFINITION 3.2:

Eine Hyperebene $H := \{x:\ cx = \alpha\}$ in $Q\times\mathbb{R}$ heißt <u>Stützhyperebene</u> in $Q\times\mathbb{R}$ zu einem konvexen Polyeder $P \subset Q\times\mathbb{R}$ mit $\dim P = \dim Q\times\mathbb{R} = n$, wenn gilt:

(1) $P \cap \{x:\ cx = \alpha\} \neq \emptyset$

(2) $P \not\subset \{x:\ cx \geq \alpha\} \Longrightarrow P \subset \{x:\ cx \leq \alpha\}$.

DEFINITION 3.3:

Eine Stützhyperebene H in $Q\times\mathbb{R}$ zu einem konvexen Polyeder P mit $\dim P = \dim Q\times\mathbb{R} = n$ heißt <u>Begrenzungshyperebene</u> in $Q\times\mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\dim (P\cap H) = n-1\ .$$

Die folgenden Betrachtungen sind ausschließlich auf den Raum $Q\times\mathbb{R}$ bezogen. Wenn daher von Stüzzhyperebenen bzw. Begrenzungshyperebenen gesprochen wird, soll darunter Stütz- bzw. Begrenzungshyperebene in $Q\times\mathbb{R}$ verstanden werden.

Danach ist $A_o(\varrho)$ Begrenzungshyperebene zu $A(\varrho)$ und $B_o(\varrho)$ Begrenzungshyperebene zu $B(\varrho)$.

SATZ 3.3:

Sei $\varphi' \in P$ mit $Q_a(\varphi') \neq \emptyset$.

Dann ist $A_o(\varphi')$ Stützhyperebene zu $A(P)$.

Beweis:

Wegen $Q_a(\varphi') \neq \emptyset$ gibt es nach (2.1) (Seite 27) ein $\sigma \in Q$, so daß gilt:

$$a(\varphi', \sigma) = \max_{\varphi \in P} a(\varphi, \sigma) =: z_{\varphi'}(\sigma) .$$

Dann gilt

$$(\sigma, z_{\varphi'}(\sigma)) \in A_o(\varphi')$$
$$(\sigma, z_{\varphi'}(\sigma)) \in A(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in P .$$

Daraus folgt mit (3.8) :

$$A(P) \cap A_o(\varphi') = \bigcap_{\varphi \in P} A(\varphi) \cap A_o(\varphi') \neq \emptyset$$

und andererseits

$$A(P) \subset A(\varphi') \subset \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z \geq a(\varphi', \sigma)\} ,$$

also ist $A_o(\varphi')$ Stützhyperebene zu $A(P)$.

DEFINITION 3.4:

Die Abbildung $\pi : \mathfrak{P}(Q \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{P}(Q)$ mit $\pi(M \times \mathbb{R}) = M$ für alle $M \subset Q$ heißt <u>Projektion</u> von $Q \times \mathbb{R}$ auf Q .

SATZ 3.4:

Sei $\varphi' \in P$ mit $Q_a(\varphi') \neq \emptyset$.

Dann gilt:

a) $\pi (A_o(\varphi') \cap A(P)) = Q_a(\varphi')$,

b) $\dim (A_o(\varphi') \cap A(P)) = \dim Q_a(\varphi')$.

Beweis:

a) $\pi\,(A_o(\mathcal{G}') \cap A(P)) = \pi\,(\{(\sigma,z)\in Q\times\mathbb{R}:$

$$z = a(\mathcal{G}',\sigma) = \max_{\mathcal{G}\in P} a(\mathcal{G},\sigma)\})$$

$$= \{\sigma\in Q:\ a(\mathcal{G}',\sigma) = \max_{\mathcal{G}\in P} a(\mathcal{G},\sigma)\}$$

$$= Q_a(\mathcal{G}')\ .$$

b) Sei $\dim Q_a(\mathcal{G}') = k$. Dann gibt es zu beliebigem $\sigma_{k+1}\in Q_a(\mathcal{G}')$ wegen der Konvexität von $Q_a(\mathcal{G}')$ unabhängige Punkte $\sigma_0,\ldots,\sigma_k$, so daß gilt:

$$\sigma_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} s_i\sigma_i \quad \text{mit} \sum_{i=0}^{k} s_i = 1 \quad \text{und } s_i \geqslant 0$$

für alle $i = 0,\ldots,k$.

Sei $z_i := a(\mathcal{G}',\sigma_i)$ für $i = 0,\ldots,k+1$, so sind (σ_0,z_0), ... , (σ_k,z_k) auch unabhängige Punkte in $A_o(\mathcal{G}')\cap A(P)$, und (σ_{k+1},z_{k+1}) ein beliebiger weiterer Punkt von $A_o(\mathcal{G}')\cap A(P)$, dann gilt:

$$z_{k+1} = a(\mathcal{G}',\sigma_{k+1}) = a\Big(\mathcal{G}',\sum_{i=0}^{k} s_i\sigma_i\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} s_i a(\mathcal{G}',\sigma_i) = \sum_{i=0}^{k} s_i z_i\ ,$$

also $\sum_{i=0}^{k} s_i\,(\sigma_i,z_i) = (\sigma_{k+1},z_{k+1})$, und daraus folgt:

$$\dim\,(A_o(\mathcal{G}')\cap A(P)\,) = k$$

Definiert man

(3.11) $C_{oj} := \{(\sigma,z)\in Q\times\mathbb{R}:\ q_j = 0\}$ für alle

für alle $j = 1,\ldots,n$,

so ist die Projektion $\pi(C_{oj})$ Begrenzungshyperebene zu Q und es gilt $\overline{\pi(C_{oj})} \subset \mathrm{Rd}\, Q$.

SATZ 3.5:

Sei γ die Menge aller Begrenzungshyperebenen von A(P). Dann ist γ folgendermaßen darstellbar:

$$\gamma = \{C_{o1},\ldots,C_{on}\} \cup \{A_o(x): \dim Q_a(x) = n-1\} \quad .$$

Beweis:

Nach (3.10) und (3.5) gilt:

$$(3.12) \qquad A(P) = \bigcap_{i=1}^{m} A(x_i) = \bigcap_{j=1}^{n} C_j \cap \bigcap_{i=1}^{m} Z(x_i) \ ,$$

dabei sind die Mengen C_j für $j = 1,\ldots,n$ und $Z(x_i)$ für $i = 1,\ldots,m$ die in (3.3) bzw. (3.4) definierten Halbräume. Da $A_o(x)$ Begrenzungshyperebene zu $Z(x) \cap Q$ für beliebiges $x \in X$ ist, (vgl. dazu (3.1) und (3.4)) folgt aus (3.12):

$$(3.13) \qquad \gamma \subset \{C_{o1},\ldots,C_{on}\} \cup \{A_o(x): x \in X\} \ .$$

Für beliebiges $j = 1,\ldots,n$ gilt:

$$\dim (C_{oj} \cap A(P)) = \dim \{(\varphi,z) \in L(Q) \times \mathbb{R}: q_j = 0 \ , \ z \geq \max_{\varphi \in P} a(\varphi,\varphi)\}$$

$$= n-1 \quad \text{wegen} \quad \max_{\varphi \in P} a(\varphi,\varphi) < \infty \ ,$$

damit ist C_{oj} Begrenzungshyperebene zu A(P) .

Dann folgt aus (3.13) und Satz 3.4 b) die Behauptung.

SATZ 3.6:

Sei $\xi' = (p'_1, \ldots, p'_m) \in P$. Dann gilt:

$$A_o(\xi') \cap A(P) = \bigcap_{i:p'_i>0} A_o(x_i) \cap A(P) .$$

Beweis:

Nach (3.6) und (3.8) folgt mit Korollar 2.5.1 :

$$\begin{aligned} A_o(\xi') \cap A(P) &= \{ (\eta, z) \in Q \times \mathbb{R} : z = \max_{\xi \in P} a(\xi, \eta) = a(\xi', \eta) \} \\ &= \{ (\eta, z) \in Q \times \mathbb{R} : z = \max_{\xi \in P} a(\xi, \eta) = a(x_i, \eta) \\ &\qquad \text{für alle } i : p'_i > 0 \} \\ &= \bigcap_{i:p'_i>0} A_o(x_i) \cap A(P) . \end{aligned}$$

SATZ 3.7:

Sei $Q_a(x_s) \neq \emptyset$ und $\dim Q_a(x_s) = n-k$ für ein $k \in \{2, \ldots, n\}$. Dann existiert ein $r \in \{1, \ldots, k\}$, so daß gilt:

(3.14) $$A_o(x_s) \cap A(P) = \bigcap_{i=1}^{r} A_o(x_i) \cap \bigcap_{i=r+1}^{k} C_{oi}$$

und die Hyperebenen $A_o(x_1), \ldots, A_o(x_r), C_{o,r+1}, \ldots, C_{ok}$ sind unabhängige Begrenzungshyperebenen von A(P),

(3.15) $$\sum_{i=1}^{r} t_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{k} t_i \varepsilon_i = \alpha_s \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{r} t_i = 1$$

und außerdem ist der Vektor α_i die i-te Zeile der Auszahlungsmatrix A und ε_i der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$; die Vektoren $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_k$ sind linear unabhängig.

Beweis:

Nach Satz 3.4 a) gilt:

$$Q_a(x_s) = \pi(A_o(x_s) \cap A(P)).$$

Mit $Q_a(x_s)$ ist auch $A_o(x_s) \cap A(P)$ nicht leer, also ist $A_o(x_s)$ Stützhyperebene zu $A(P)$.

Ferner gilt nach Satz 3.4 b):

(3.16) $\dim Q_a(x_s) = \dim (A_o(x_s) \cap A(P)) = n-k$.

Damit ist $A_o(x_s) \cap A(P)$ eine $(n-k)$ -dimensionale Seitenfläche von $A(P)$ und somit als Durchschnitt von genau k unabhängigen Begrenzungshyperebenen $H_1, \ldots, H_k$ von $A(P)$ darstellbar (vgl. I1I § 9/2, Seite 73) :

$$(3.17) \quad A_o(x_s) \cap A(P) = \bigcap_{i=1}^{k} H_i \quad \text{oder} \quad A_o(x_s) \supset \bigcap_{i=1}^{k} H_i \ .$$

Angenommen, es gilt $C_i = H_i$ für alle $i = 1,\ldots,k$, so gilt mit der Schreibweise

$$(3.18) \quad A_o(x_i) = \{(\eta,z) \in Q \times \mathbb{R}: \ \alpha_i \eta - z = 0\}$$

$$(3.19) \quad C_{oj} = \{(\eta,z) \in Q \times \mathbb{R}: \ \gamma_j \eta = 0\} ,$$

dabei ist $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$,

nach (3.17) folgendes:

Das lineare Gleichungssystem

$$(3.20) \quad \begin{cases} \gamma_i \eta = 0 & \text{für } i=1,\ldots,k \\ \alpha_s \eta - z = 0 \\ \vartheta \eta = 1 \end{cases}$$

mit $\eta = (q_1,\ldots,q_n)$ und $\vartheta = (1,\ldots,1)$ besteht aus $k+2$ linearen Gleichungen und $n+1$ Variablen $q_1,\ldots,q_n,z$, die Lösungsmannigfaltigkeit hat die Dimension $n-k$ nach (3.16).

Dann existiert ein Vektor $(t_1,\ldots,t_{k+2}) \neq (0,\ldots,0)$, so daß gilt:

$$(3.21)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} t_i\,(\mathfrak{c}_i,0) + t_{k+1}\,(\mathfrak{a}_s,-1) + t_{k+2}\,(\mathfrak{v},0) = \mathfrak{o} \\ t_{k+2} = 0\,. \end{cases}$$

Schreibt man (3.21) komponentenweise, so folgt mit $t_{k+2} = 0$ aus der (n+1)-ten Gleichung auch $t_{k+1} = 0$, damit müßten die Einheitsvektoren $\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_k$ linear abhängig sein. Man erhält einen Widerspruch zur Annahme. Dann folgt, wegen $\{A_o(x) : \dim Q_a(x) = n-1\} \neq \emptyset$ (vgl. Korollar 2.10.1) aus Satz 3.5 die Behauptung (6.14).

Zum Beweis der Vektorgleichung (3.15) benutzt man (3.14), denn (3.14) läßt sich durch das folgende lineare Gleichungssystem darstellen:

$$(3.22)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_i\mathfrak{y} - z = 0 & \text{für } i=1,\ldots,r,s \\ \mathfrak{c}_i\mathfrak{y} = 0 & \text{für } i=r+1,\ldots,k \\ \mathfrak{v}\mathfrak{y} = 1 & \text{mit } \mathfrak{v} = (1,\ldots,1) \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem besteht wieder aus k+2 linearen Gleichungen und n+1 Variablen, seine Lösungsmannigfaltigkeit hat nach (3.14) und (3.16) die Dimension n-k. Ebenfalls wegen (3.14) sind die Vektoren $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{c}_{r+1},\ldots,\mathfrak{c}_k$ linear unabhängig.
Entsprechend zu (3.23) existiert auch hier ein Vektor $(t_1,\ldots,t_{k+2}) \neq (0,\ldots,0)$, so daß gilt:

$$(3.23)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} t_i(\mathfrak{a}_i,-1) + \sum_{i=r+1}^{k} t_i(\mathfrak{c}_i,0) + t_{k+1}(\mathfrak{a}_s,-1) \\ \qquad + t_{k+2}(\mathfrak{v},0) = \mathfrak{o} \\ t_{k+2} = 0 \end{cases}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ $\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_k$ gilt mit $t_{k+2} = 0$ auch die Bedingung $t_{k+1} \neq 0$.
Schreibt man andererseits (3.23) wieder komponentenweise, so folgt aus der (n+1) -ten Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{r} t_i + t_{k+1} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{-t_{k+1}} \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 .$$

Dividiert man die ersten n Gleichungen von (3.23) durch $-t_{k+1}$, so folgt aus den so entstehenden Gleichungen die Behauptung (3.15).

Damit hat man folgendes Ergebnis:
Geht man von der Voraussetzung dim $Q_a(x_s) = n-k$ mit $k \in \{2,\ldots,n\}$ aus, so läßt sich der Vektor σ_s, der gerade der Zeile s der Auszahlungsmatrix A entspricht, als Linearkombination von genau k Vektoren, d.h. r Zeilen dieser Matrix, ergänzt durch k-r Einheitsvektoren , darstellen.
Ferner gilt $t_1 + \ldots + t_r = 1$ und $r \leq k$.

Ziel des folgenden Satzes ist es, zu zeigen, daß die Koeffizienten $t_1,\ldots,t_r$ alle positiv sind, dann kann man den Vektor $\mathfrak{t} = (t_i)$ als Strategie interpretieren.
Ferner wird für später von Bedeutung sein, daß die Koeffizienten $t_{r+1},\ldots,t_k$ negativ sind.
Da der Beweis der folgenden Sätze 3.8 und 3.9 etwas langwierig ist, soll das Ergebnis an dieser Stelle bereits angegeben werden. Mit $t_i > 0$ für $i=1,\ldots,r$ und $t_i < 0$ für $i=r+1,\ldots,k$ gibt es ein $\varrho \in P$ mit $\varrho \neq x_s$, so daß gilt

(1) $r = k \Longrightarrow a(\varrho,\eta) = a(x_s,\eta)$ für alle $\eta \in Q$

(2) $r < k \Longrightarrow \varrho \underset{(Q)}{\triangleright} x_s$.

SATZ 3.8:

Sei $Q_a(x_s) \neq \emptyset$ und dim $Q_a(x_s) = n-k$ für ein $k \in \{2,\ldots,n\}$.
Dann existiert ein $\varrho' \in P$ mit $\varrho' \neq x_s$, so daß gilt:

$$a(\varrho',\sigma) \gtrdot a(x_s,\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in Q.$$

Beweis:

Die Voraussetzungen von Satz 3.7 sind erfüllt, also sind die Bedingungen (3.14) und (3.15) erfüllt.

(1) Es soll zunächst gezeigt werden, daß die Bedingungen (3.15) erfüllt sind für $t_i > 0$ mit $i=1,\ldots,r$.

Sei o.B.d.A. $t_i \begin{cases} > 0 & \text{für } i=1,\ldots,j \\ \leqq 0 & \text{für } i=j+1,\ldots,r \end{cases}$,

so gilt wegen $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$ die Bedingung $1 \leqq j \leqq r$.

Angenommen, es sei $j < r$:

Dann erhält man aus (3.15):

$$(3.24) \quad \sum_{i=1}^{j} t_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{k} t_i \alpha_i = \alpha_s + \sum_{i=j+1}^{r} |t_i| a_i$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 .$$

Dividiert man diese Gleichung durch

$$\sum_{i=1}^{j} t_i = 1 + \sum_{i=j+1}^{r} |t_i| =: s$$

und sei ferner definiert

(3.25) $\varrho_1 := (p_{11},\ldots,p_{1m})$ mit $p_{1i} := \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{für } i=s \\ \frac{|t_i|}{s} & \text{für } i=j+1,..,r \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$

(3.26) $\varrho_2 := (p_{21},\ldots,p_{2m})$ mit $p_{2i} := \begin{cases} \frac{t_i}{s} & \text{für } i=1,\ldots,j \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$

dann folgt mit

$$\sum_{i=1}^{m} p_{1i} = \sum_{i=1}^{m} p_{2i} = 1 \quad \text{und} \quad p_{1i} \geq 0,\ p_{2i} \geq 0$$

aus (3.24), (3.25) und (3.26):

$$\begin{aligned} (3.27)\quad \varrho_2 A + \frac{1}{s}\sum_{i=r+1}^{k} t_i \sigma_i &= \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{j} t_i \alpha_i + \frac{1}{s}\sum_{i=r+1}^{k} t_i \sigma_i \\ &= \frac{\alpha_s}{s} + \frac{1}{s}\sum_{i=j+1}^{r} |t_i| \alpha_i \\ &= \varrho_1 A , \end{aligned}$$

wobei A die Auszahlungsmatrix des Spielers I ist.

Wegen $\{\eta\in Q:\ q_{r+1}=\ldots=q_k=0\} = \left(Q \cap \bigcap_{i=r+1}^{k} C_{oi}\right)$

folgt aus (3.27):

(3.28) $a(\varrho_1,\eta) = a(\varrho_2,\eta)$ für alle $\eta\in\left(Q \cap \bigcap_{i=r+1}^{k} C_{oi} \right)$.

Andererseits gilt nach Satz 3.4b) und Satz 3.6:

$$\begin{aligned} (3.29)\quad \dim Q_a(\varrho_2) &= \dim \left(A_o(\varrho_2) \cap A(P) \right) \\ &= \dim \left(\bigcap_{i=1}^{j} A_o(x_i) \cap A(P) \right) = n-j , \end{aligned}$$

ferner nach Satz 2.5:

$$(3.30) \quad \dim Q_a(\varrho_{\gamma 1}) \leq \dim Q_a(x_s) = n-k .$$

Dann folgt mit der Annahme $j \prec r$:

$$(3.31) \quad \dim Q_a(\varrho_{\gamma 1}) \prec \dim Q_a(\varrho_{\gamma 2}) .$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
Q_a(\varrho_{\gamma 1}) &\subset Q_a(x_s) && \text{(nach (3.25) und Satz 2.5)} \\
&= \Pi (A_o(x_s) \cap A(P)) && \text{(nach Satz 3.4 a))} \\
&= \Pi \Big(\overset{r}{\underset{i=1}{\frown}} A_o(x_i) \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} \cap A(P) \Big) \\
& && \text{(nach Satz 3.7)} \\
&\subsetneq \Pi \Big(\overset{j}{\underset{i=1}{\frown}} A_o(x_i) \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} \cap A(P) \Big) \\
& && \text{(wegen } j \prec r\text{)} \\
&= \Pi \Big(A_o(\varrho_{\gamma 2}) \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} \cap A(P) \Big) \\
& && \text{(nach (3.26) und Satz 3.6)} \\
&= Q_a(\varrho_{\gamma 2}) \cap \Pi \Big(\overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} \Big) \\
& && \text{(nach Satz 3.4 a))} \\
&= Q_a(\varrho_{\gamma 2}) \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} .
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

Es existiert ein $\eta \in \Big(Q_a(\varrho_{\gamma 2}) \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} \Big)$, so daß gilt:

$$a(\varrho_{\gamma 1}, \eta) \prec a(\varrho_{\gamma 2}, \eta) .$$

Wegen $Q_a(\varrho_{\gamma 2}) \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi} \subset Q \cap \overset{k}{\underset{i=r+1}{\frown}} C_{oi}$ hat man einen

Widerspruch zu (3.28), also ist $j = r$.

Damit gilt (3.15) mit $t_i > 0$ für alle $i = 1,\ldots,r$.

(2) Im zweiten Schritt soll gezeigt werden, daß die Bedingungen (3.15) erfüllt sind für $t_i < 0$ mit $i = r+1,\ldots,k$.

Angenommen, es sei o.B.d.A. $t_k \geq 0$:

Dann ergibt sich mit

(3.32) $\varrho' := (p'_1,\ldots,p'_m)$ und $p'_i := \begin{cases} t_i & \text{für } i=1,\ldots,r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

indem man (3.15) komponentenweise schreibt:

$$a(\varrho',y_j) + t_j = a(x_s,y_j) \quad \text{für } j=r+1,\ldots,k$$
$$a(\varrho',y_j) = a(x_s,y_j) \quad \text{sonst}$$

oder

(3.33) $a(\varrho',\sigma) \leq a(x_s,\sigma)$ für alle $\sigma \in (Q \cap \bigcap_{i=r+1}^{k-1} C_{oi})$.

Andererseits gilt:

$$Q_a(x_s) = \pi (A_o(x_s) \cap A(P)) \quad \text{(nach Satz 3.4a))}$$
$$= \pi (\bigcap_{i=1}^{r} A_o(x_i) \cap \bigcap_{i=r+1}^{k} C_{oi} \cap A(P)) \quad \text{(nach Satz 3.7)}$$
$$= \pi (A_o(\varrho') \cap \bigcap_{i=r+1}^{k} C_{oi} \cap A(P)) \quad \text{(nach Satz 3.6)}$$
$$\subsetneq \pi (A_o(\varrho') \cap \bigcap_{i=r+1}^{k-1} C_{oi} \cap A(P))$$
(wegen der Unabhängigkeit von $A_o(x_1),..,A_o(x_r),C_{or+1},\ldots,C_{ok}$)
$$= Q_a(\varrho') \cap \pi(\bigcap_{i=r+1}^{k-1} C_{oi}) = Q_a(\varrho') \cap \bigcap_{i=r+1}^{k-1} C_{oi} .$$
(nach Satz 3.4 a))

Damit existiert ein $\sigma \in Q_a(\varrho') \wedge \bigwedge_{i=r+1}^{k-1} C_{oi}$, so daß gilt:

$$a(x_s,\sigma) < a(\varrho',\sigma) .$$

Wegen $Q_a(\varrho') \wedge \bigwedge_{i=r+1}^{k-1} C_{oi} \subset Q \wedge \bigwedge_{i=r+1}^{k-1} C_{oi}$ erhält man einen Widerspruch zu (3.33).

Damit gilt (3.15) mit $t_i < 0$ für alle $i = r+1,\ldots,k$.

(3) Mit (1) und (2) erhalten die Bedingungen (3.15) also die Form:

$$(3.34) \quad \sum_{i=1}^{r} t_i \sigma_i = \sigma_s - \sum_{i=r+1}^{k} t_i \sigma_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{r} t_i = 1$$

$$\text{und} \quad t_i \begin{cases} > 0 & \text{für } i=1,\ldots,r \\ < 0 & \text{für } i=r+1,\ldots,k \end{cases} , \text{ wobei } 1 \leq r \leq k.$$

Definiert man $\varrho' \in P$ wie in (3.32) und schreibt (3.34) komponentenweise, so ergibt sich

$$(3.34^+) \quad a(\varrho',y_j) \begin{cases} > a(x_s,y_j) & \text{für } j=r+1,\ldots,k \\ = a(x_s,y_j) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung.

SATZ 3.9:

a) Sei $\emptyset \neq Q_a(x_s) \not\subset \mathrm{Rd}\, Q$ und $\dim Q_a(x_s) = n-k$ für ein $k \in \{2,\ldots,n\}$. Dann existiert ein $\varrho' \in P$ mit $\varrho' \neq x_s$, so daß gilt:

$$a(\varrho',\sigma) = a(x_s,\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in Q .$$

b) Sei $\emptyset \neq Q_a(x_s) \subset \mathrm{Rd}\, Q$ und $\dim Q_a(x_s) = n-k$ für ein $k \in \{2,\ldots,n\}$. Dann existiert ein $\varrho' \in P$ mit $\varrho' \neq x_s$, so daß gilt:

$$\varrho' \underset{(Y)}{\rhd} x_s .$$

Beweis:

a) Die Voraussetzungen von Satz 3.7 sind erfüllt, es gilt also (3.14).

Angenommen, es existiert ein $j = 1,\ldots,n$, so daß gilt:

$$A_o(x_s) \cap A(P) \subset C_{oj} ,$$

so folgt aus $(\sigma,z) = (q_1,\ldots,q_n,z) \in A_o(x_s) \cap A(P)$ $q_j = 0$ und daraus mit Satz 3.4 a):

$$Q_a(x_s) = \overline{\pi}\,(A_o(x_s) \cap A(P)) \subset \mathrm{Rd}\, Q$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, also war die Annahme falsch, (3.14) gilt für $r = k$. Aus (3.34^+) folgt die Behauptung.

b) Wegen $Q_a(x_s) \subset \mathrm{Rd}\, Q$ existiert für alle $\sigma \in Q_a(x_s)$ ein $j=1,\ldots,n$, so daß gilt: $q_j = 0$. Damit ist jedes Element von $A_o(x_s) \cap A(P)$ auch Element von C_{oj}. Die Begrenzungshyperebene C_{oj} ist unabhängig zu $A_o(x)$ für alle $x \in X$. Hieraus folgt nach Satz 3.7, daß die Bedingungen (3.14) für $r < k$ erfüllt sind und mit (3.34^+) die Behauptung.

SATZ 3.10:

Sei $Q_a(x_s) = \emptyset$. Dann existiert eine zu $A_o(x_s)$ parallele Stützhyperebene an $A(P)$.

Beweis:

Wegen $Q_a(x_s) = \emptyset$ gilt:

$$(3.35) \qquad z_s(\sigma) := a(x_s,\sigma) < \max_{\varrho \in P} a(\varrho,\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in Q.$$

Ferner ist

$$(3.36)\qquad A_o^c(x_s) := \{ (\eta,z)\in Q\times\mathbb{R}: \alpha_s\eta - z + c = 0,\ c\in\mathbb{R}\}$$

eine zu $A_o(x_s)$ parallele, um den Abstand $|c|$ verschobene Hyperebene in $Q\times\mathbb{R}$ (vgl. Definition 3.1).

Sei

$$c_o(\eta') \begin{cases} := \max\limits_{\xi\in P} a(\xi,\eta) - a(x_s,\eta) \text{ für ein } \eta=\eta'\in Q \\ :\leq \max\limits_{\xi\in P} a(\xi,\eta) - a(x_s,\eta) \text{ für alle } \eta\in Q\ , \end{cases}$$

dann ist wegen (3.35)

$$c_o(\eta') > 0\ .$$

Ferner sei

$$\begin{aligned} z_s^{c_o}(\eta') &:= z_s(\eta') + c_o(\eta') \\ &= a(x_s,\eta') + c_o(\eta') = \max_{\xi\in P} a(\xi,\eta')\ . \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &(\eta', z_s^{c_o}(\eta'))\in A(\xi) \quad \text{für alle } \xi\in P \\ &(\eta', z_s^{c_o}(\eta'))\in A_o^{c_o}(x_s)\ , \end{aligned}$$

also

$$A_o^{c_o}(x_s)\cap A(P) = A_o^{c_o}(x_s)\cap \bigcap_{\xi\in P} A(\xi) \neq \emptyset\ .$$

Andererseits enthält der zu $A_o^{c_o}(x_s)$ gehörige Halbraum

$$A^{c_o}(x_s) := \{ (\eta,z)\in Q\times\mathbb{R}: z \geqslant a(x_s,\eta) + c_o(\eta')\}$$

das konvexe Polyeder $A(P)$ als Teilmenge, damit ist $A_o^{c_o}(x_s)$ Stützhyperebene zu $A(P)$.

Definiert man

$$Q_a{}^{c_o}(x_s) := \{ \eta \in Q : \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta) = a(x_s,\eta) + c_o \}$$

so gilt nach (3.36) für alle $c_o > 0$:

$$\pi(A^{c_o}(x_s) \cap A(P)) =$$

$$= \pi(\{ (\eta,z) \in Q \times \mathbb{R} : \quad z = a(x_s,\eta) + c_o = \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta))$$

$$= \{ \eta \in Q : a(x_s,\eta) + c_o = \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta) \} = Q_a{}^{c_o}(x_s)$$

Ordnet man $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ das Spiel $\bar{\sigma}' := (P,Q;a',b)$ zu, so daß für alle $y \in Y$ gilt:

$$a'(x,y) := \begin{cases} a(x,y) + c_o & \text{für } x = x_s \\ a(x,y) & \text{sonst} , \end{cases}$$

so gilt nach (2.1) und der Definition von $Q_a{}^{c_o}(x_s)$

$$Q_{a'}(x) = \begin{cases} Q_a{}^{c_o}(x) & \text{für } x = x_s \\ Q_a(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alle Aussagen über die Mengen $Q_a(\xi)$ lassen sich daher auf $Q_{a'}(\xi)$ übertragen.

SATZ 3.11:

Sei $Q_a(x_s) = \emptyset$. Dann existiert ein $\xi' \in P$ mit:

$$a(\xi', y) \succ a(x_s, y) \quad \text{für alle } y \in Y .$$

Beweis:

Nach Satz 3.10 existiert ein $c_o > 0$, so daß die in (3.36) definierte Menge $A_o^{c_o}(x_s)$ eine zu $A_o(x_s)$ parallele Stützhyperebene an A(P) darstellt. Dann unterscheidet man wegen $A_o^{c_o}(x_s) \cap A(P) \neq \emptyset$ im folgenden drei Fälle:

(1) $Q_a^{c_o}(x_s) := (A_o^{c_o}(x_s) \cap A(P)) \subset \mathrm{Rd}\, Q$

Dann gilt nach Satz 3.9 b) :

$$a(\xi', y) \succcurlyeq a(x_s, y) + c_o \quad \text{für alle } y \in Y \text{ und } c_o > 0,$$

daraus folgt die Behauptung.

(2) $Q_a^{c_o}(x_s) := \pi(A_o^{c_o}(x_s) \cap A(P)) \not\subset \mathrm{Rd}\, Q$

und $\dim Q_a^{c_o}(x_s) < n-1$.

Dann gilt nach Satz 3.9 a) :

$$a(\xi', y) = a(x_s, y) + c_o \quad \text{für alle } y \in Y \text{ und } c_o > 0,$$

daraus folgt die Behauptung.

(3) Sei $\dim Q_a^{c_o}(x_s) = n-1$.

Dann gilt wegen Satz 3.4 b) auch $\dim (A_o^{c_o}(x_s) \cap A(P)) = \dim (A_o^{c_o}(x_s) \cap A(P)) = n-1$ und $A_o^{c_o}(x_s)$ ist Begrenzungshyperebene zu A(P).

Nach Satz 3.5 existiert dann ein $i \neq s$, so daß gilt:

$$A_o(x_i) = A_o^{c_o}(x_s) ,$$

daraus folgt

$$a(x_i,y) = a(x_s,y) + c_o \text{ für alle } y \in Y \text{ und } c_o > 0$$

Setzt man $\varphi' := x_i$, so ist die Behauptung auch hier nachgewiesen.

Die Sätze 3.7 - 3.11 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

SATZ 3.12:

Sei dim $Q_a(x_s) \neq n-1$.

Dann existiert ein $\varphi' \in P$ mit $\varphi' \neq x_s$, so daß gilt:

$$a(\varphi',y) \geqslant a(x_s,y) \quad \text{für alle } y \in Y .$$

Beweis:

(1) Sei $Q_a(x_s) = \emptyset$:

Dann existiert nach Satz 3.11 ein $\varphi' \in P$ mit:

$$a(\varphi',y) > a(x_s,y) \quad \text{für alle } y \in Y .$$

(2) Sei $Q_a(x_s) \neq \emptyset$:

a) $Q_a(x_s) \subset \text{Rd } Q$:

Dann existiert nach Satz 3.9 ein $\varphi' \in P$ mit:

$$a(\varphi',y) \geqslant a(x_s,y) \quad \text{für alle } y \in Y$$
$$> a(x_s,y) \quad \text{für mindestens ein } y \in Y .$$

b) $Q_a(x_s) \not\subset \text{Rd } Q$:und dim $Q_a(x_s) < n-1$:

Dann existiert nach Satz 3.9 ein $\varphi' \in P$ mit $\varphi' \neq x_s$, so daß gilt:

$$a(\varphi',y) = a(x_s,y) \quad \text{für alle } y \in Y .$$

Damit ist Satz 3.12 bewiesen.

Damit hat man hinreichende Bedingungen für dominierte Strategien:

KOROLLAR 3.12.1:

a) Sei $Q_a(x_s) = \emptyset \Longrightarrow \forall \varrho' \in P: \quad \varrho' \underset{(Q)}{\triangleright} x_s$

b) $Q_a(x_s) \subset \mathrm{Rd}\ Q \Longrightarrow \forall \varrho' \in P: \quad \varrho' \underset{(Q)}{\triangleright} x_s$

Der Beweis von a) ergibt sich nach Definition 1.6 und Satz 1.4 direkt aus Satz 3.12,(1).
Der Beweis von b) ergibt sich nach Definition 1.6 und Satz 1.4 direkt aus Satz 3.12,(2) a).

Falls also $x_s \in X$ bzgl. Q nicht dominiert wird, folgt daraus: daß $Q_a(x_s)$ nicht leer und auch nicht Teilmenge des Randes von Q ist .

Vertauscht man die Rollen der Spieler, so erhält man entsprechende Ergebnisse zu Satz 3.12:

SATZ 3.13:
Sei $\dim P_b(y_t) \neq n-1$.
Dann existiert ein $\sigma' \in Q$ mit $\sigma' \neq y_t$, so daß gilt:

$$b(x,\sigma') \gtrdot b(x,y_t) \quad \text{für alle } x \in X .$$

KOROLLAR 3.13.1:

a) $P_b(y_t) = \emptyset \Longrightarrow \forall \sigma' \in Q: \quad \sigma' \underset{(P)}{\triangleleft} y_t$

b) $P_b(y_t) \subset \mathrm{Rd}\ P \Longrightarrow \forall \sigma' \in Q: \quad \sigma' \underset{(P)}{\triangleleft} y_t$.

Setzt man

$$\underline{b}(\varrho,\sigma) := -b(\varrho,\sigma) \quad \text{für alle } \varrho\in P,\ \sigma\in Q\ ,$$

so gilt:

$$(3.37)\quad Q_b(\varrho') = Q_{-\underline{b}}(\varrho') = \{\sigma\in Q:\ -\underline{b}(\varrho',\sigma) = \min_{\varrho\in P}(-\underline{b}(\varrho,\sigma))\}$$

$$= \{\sigma\in Q:\ \underline{b}(\varrho',\sigma) = \max_{\varrho\in P}\underline{b}(\varrho,\sigma)\}$$

Damit gilt entsprechend zu Satz 3.12:

SATZ 3.14:

(1) $Q_b(x_s) = \emptyset \implies \forall\varrho'\in P:\ b(\varrho',y) < b(x_s,y)$ für alle $y\in Y$.

(2) $\left.\begin{array}{l} Q_b(x_s) \neq \emptyset \\ Q_b(x_s) \subset \mathrm{Rd}\ Q \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\varrho'\in P:\ b(\varrho',y) \leq b(x_s,y)$ für alle $y\in Y$

$b(\varrho',y) < b(x_s,y)$ für mindestens ein $y\in Y$.

(3) $\left.\begin{array}{l} Q_b(x_s) \neq \emptyset \\ Q_b(x_s) \not\subset \mathrm{Rd}\ Q \\ \dim Q_b(x_s) < n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\varrho'\in P:\ b(\varrho',y) = b(x_s,y)$ für alle $y\in Y$

Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Beweis zu Satz 3.12 mit (3.37) .

II KAPITEL:

AUSSAGEN ÜBER KONKURRENZ-SPIELE

4.) Der Begriff des Konkurrenz-Spiels

Beispiel 3:

Ein endliches Spiel $\Gamma_3 = (P,Q;a,b)$ sei gegeben durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} .$$

Der garantierte Mindestgewinnn für Spieler I beträgt

$$\max_{\xi \in P} \min_{\eta \in Q} a(\xi,\eta) = \max \{ a(x_1,y_2), a(x_2,y_1) \} = a(x_1,y_2) = 1 ,$$

der garantierte Mindestgewinn für Spieler II beträgt

$$\max_{\eta \in Q} \min_{\xi \in P} b(\xi,\eta) = \min_{\xi \in P} b(\xi, (\tfrac{14}{15},\tfrac{1}{15})) = \tfrac{2}{3} .$$

Andererseits ist $a(x_2,y_2) + b(x_2,y_2) = 9$.

Es mag in diesem Fall als vernünftig erscheinen, wenn beide Spieler sich auf die Wahl ihrer jeweils zweiten Strategie einigen und dann den Gesamtgewinn nach irgendwelchen Absprachen aufteilen.
Falls durch Absprachen beiden Spielern Vorteile entstehen, erscheint ein "kooperative" Behandlung des Spieles angebracht.

Soll daher eine nicht-kooperative Betrachtung eines Spieles sinnvoll sein, so wird man in erster Linie Spieltypen untersuchen, die einen starken Interessengegensatz der beiden Spieler in sich tragen.

So kommt man zu

DEFINITION 4.1:

(1) Ein Teilspiel (U,V;a,b) eines endlichen Spiels wird als endliches Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I bezeichnet, wenn für jedes $\eta \in V$ gilt:

$$(4.1) \quad a(\xi'(\eta),\eta) = \max_{\xi \in U} a(\xi,\eta)$$
$$\Longrightarrow b(\xi'(\eta),\eta) = \min_{\xi \in U} b(\xi, \ ) \ .$$

Gegen jede Strategie $\eta \in V$ des Spielers II bringt die Strategie $\xi' \in U$ für Spieler I den höchsten und für Spieler II den niedrigsten Gewinn.

(2) Entsprechend ist (U,V;a,b) endliches Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers II, wenn für jedes $\xi \in U$ gilt:

$$(4.2) \quad b(\xi,\eta'(\xi)) = \max_{\eta \in V} b(\xi,\eta)$$
$$\Longrightarrow a(\xi,\eta'(\xi)) = \min_{\eta \in V} a(\xi,\eta) \ .$$

Gegen jede Strategie $\xi \in U$ des Spielers I bringt die Strategie $\eta' \in V$ für Spieler II den höchsten und für Spieler I den niedrigsten Gewinn.

Spiele mit der Eigenschaft (4.1) oder (4.2) bezeichnet man auch als einseitige Konkurrenz-Spiele.

(3) Das Spiel (U,V;a,b) heißt (zweiseitiges) Konkurrenz-Spiel, wenn (U,V;a,b) Konkurrenz-Spiel bzgl. beider Spieler ist.

Für U = X, V = Y bzw. U = P, V = Q gilt Definition 4.1 entsprechend.

SATZ 4.1:

Sei $\Gamma = (U,V;a,b)$ endliches Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I und $\Gamma' = (U',Y';a',b')$ strategisch äquivalent zu Γ. Dann ist Γ' endliches Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I.

Beweis:

Es existieren bijektive Abbildungen $f: U \to U'$ und $g: V \to V'$

und $$a'(f(\varphi),g(\eta)) = k_1 a(\varphi,\eta) + c_1 ,$$

$$b'(f(\varphi),g(\eta)) = k_2 b(\varphi,\eta) + c_2 ;$$

dabei ist $k_1,k_2 \in (0,\infty)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in U$, $\eta \in V$.

Da Γ Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I ist, folgt:

$$\max_{\varphi \in U} a(\varphi,\eta) = a(\varphi^0(\eta),\eta) \Longrightarrow \min_{\varphi \in U} b(\varphi,\eta) = b(\varphi^0(\eta),\eta) \quad \text{für alle } \eta \in V.$$

Damit ergibt sich:

$$\max_{f(\varphi) \in U'} a'(f(\varphi),g(\eta)) = \max_{\varphi \in U} k_1 a(\varphi,\eta) + c_1) =$$

$$k_1 \max_{\varphi \in U} a(\varphi,\eta) + c_1 = k_1 a(\varphi^0(\eta),\eta) + c_1 =$$

$$a'(f(\varphi^0),g(\eta))$$

und ferner:

$$\min_{f(\varphi) \in U'} b'(f(\varphi),g(\eta)) = k_2 \min_{\varphi \in U} b(\varphi,\eta) + c_2 =$$

$$b'(f(\varphi^0), g(\eta)) .$$

Damit ist Satz 4.1 bewiesen.

Ersetzt man in Satz 4.1 den Spieler I durch Spieler II, so verläuft der Beweis ganz analog; man hat damit trivialerweise auch die Invarianz der Eigenschaften eines Konkurrenz-Spieles gegenüber strategischer Äquivalenz.

SATZ 4.2:

Sei $\tilde{\sigma} = (P,Q;a,b)$ endliches Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I. Dann ist auch $\sigma = (X,Y;a,b)$ endliches Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I.

Beweis:

Man wähle ein beliebiges $\eta \in Q$ und es sei:

$$\max_{\xi \in P} a(\xi,\eta) = a(\xi^0(\eta),\eta) .$$

Dann muß zu η auch ein $x^0(\eta) \in X$ existieren mit:

$$(4.3) \quad \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta) = \max_{x \in X} a(x,\eta) = a(x^0(\eta),\eta) .$$

Andernfalls hätte man

$$a(x,\eta) < \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta) \quad \text{für alle } x \in X .$$

Wegen $\xi^0(\eta) := (p_1^0,\ldots,p_m^0)$ mit $\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1$ und $p_i^0 \geq 0$ für alle $i=1,\ldots,m$ würde man mit

$$a(\xi^0(\eta),\eta) = a\Big(\sum_{i=1}^{m} p_i^0 x_i, \eta\Big) = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a(x_i,\eta)$$

$$< \sum_{i=1}^{m} p_i^0 \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta) = \max_{\xi \in P} a(\xi,\eta)$$

einen Widerspruch erhalten.

Mit (4.3) folgt wegen Definition 4.1 auch

$$(4.4) \quad \min_{\xi \in P} b(\xi,\eta) = \min_{x \in X} b(x,\eta) = b(x^0(\eta),\eta) .$$

Damit gibt es auch zu jedem $y \in Y$ ein $x^0(y)$ mit:

$$\max_{\xi \in P} a(\xi,y) = a(x^0(y),y) \Longrightarrow \min_{\xi \in P} b(\xi,y) = b(x^0(y),y) .$$

Dann gilt auch:

$$\max_{x\in X} a(x,y) = a(x^0(y),y) \Longrightarrow \min_{x\in X} b(x,y) = b(x^0(y),y)$$

und damit die Behauptung.

Wie Satz 4.1 ist auch Satz 4.2 richtig, wenn man Spieler I durch Spieler II ersetzt und man erhält daraus

KOROLLAR 4.2.1:

Mit dem zweiseitigen Konkurrenz-Spiel $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ ist auch $\sigma = (X,Y;a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Dazu sei bemerkt, daß nicht notwendig mit dem zweiseitigen Konkurrenz-Spiel $\sigma = (X,Y;a,b)$ dessen gemischte Erweiterung $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ auch Konkurrenz-Spiel ist.

Dies wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt.

Beispiel 4:

$\sigma_4 = (X,Y;a,b)$ sei gegeben durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist in diesem Fall $(X,Y;a,b)$ Konkurrenz-Spiel, aber nicht die gemischte Erweiterung $(P,Q;a,b)$.

Sei nämlich $\eta = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$:

Dann gilt: $\max_{\xi\in P} a(\xi,\eta) = a(x_1,\eta) = 3$,

aber $\min_{\xi\in P} b(\xi,\eta) = b(x_2,\eta) = 2{,}5$.

Selbst die zusätzliche Forderung an $(X,Y;a,b)$, daß jedes Teilspiel von $(X,Y;a,b)$ Konkurrenz-Spiel ist, ist nicht hinreichend dafür, daß $(P,Q;a,b)$ Konkurrenz-Spiel ist.

Dies ist ebenso an Beispiel 4 einzusehen.

Allgemein ist nicht mit (U,V;a,b) auch jedes Teilspiel von (U,V;a,b) Konkurrenz-Spiel.

Dies wird gezeigt durch

Beispiel 5:

$\Gamma_5 = (X,Y;a,b)$ sei gegeben durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Dann ist $(X,Y;a,b)$ Konkurrenz-Spiel, aber nicht

$(\{x_2,x_3\};\{y_1,y_2\};a,b))$.

denn $\max\limits_{x\in X} a(x,y_2) = a(x_2,y_2) = a(x_3,y_2)$

und $\min\limits_{x\in X} b(x,y_2) = b(x_3,y_2)$.

Daß der Begriff des zweiseitigen Konkurrenz-Spiels formal eine Erweiterung des Nullsummen-Spiels darstellt, zeigt der folgende

SATZ 4.3:

Sei $\Gamma' = (U',V';a',b')$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel $\Gamma = (U,V;a,b)$. Dann ist Γ' zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Beweis:

(1) Sei $\Gamma = (U,V;a,b)$ Nullsummen-Spiel, dann gilt:

(4.6) $\quad a(\varphi,\psi) = -b(\varphi,\psi)$ für alle $\varphi\in U$, $\psi\in V$.

Daraus folgt mit

$$\max_{\varphi\in U} a(\varphi,\psi) = a(\varphi^{\circ}(\psi),\psi)$$

$$\min_{\varphi\in U} b(\varphi,\sigma) = \min_{\varphi\in U} -a(\varphi,\sigma) = -\max_{\varphi\in U} a(\varphi,\sigma) =$$

$$-a(\varphi^0(\sigma),\sigma) = b(\varphi^0(\sigma),\sigma).$$

Ebenso folgt:

$$\max_{\sigma\in V} b(\varphi,\sigma) = b(\varphi,\sigma^0(\varphi)) \Longrightarrow \min_{\sigma\in V} a(\varphi,\sigma) = a(\varphi,\sigma^0(\varphi)) ,$$

also ist Γ Konkurrenz-Spiel.

2) Nach Voraussetzung ist Γ' strategisch äquivalent zu Γ. Dann ist Γ' nach Satz 4.1 ebenfalls Konkurrenz-Spiel.

Damit ergibt sich zwischen den zweiseitigen Konkurrenz-Spielen und den Nullsummen-Spielen nach Satz 4.2 und 4.3 der folgende Zusammenhang:

SATZ 4.4:

Sei $\Gamma = (X,Y;a,b)$ und $\bar{\Gamma} = (P,Q;a,b)$.

Γ ist Nullsummen-Spiel $\Longleftrightarrow$ $\bar{\Gamma}$ ist Nullsummenspiel

$\Longrightarrow$ $\bar{\Gamma}$ ist Konkurrenz-Spiel $\Longrightarrow$ Γ ist Konkurrenz-Spiel.

Daß mit dem Konkurrenz-Spiel Γ dessen gemischte Erweiterung $\bar{\Gamma}$ nicht notwendig Konkurrenz-Spiel ist, wurde in Beispiel 4 (Seite 70) bestätigt.

Ferner ist auch das Konkurrenz-Spiel $\bar{\Gamma}$ nicht notwendig Nullsummen-Spiel.

Beispiel 6:

Sei (P,Q;a,b) gegeben durch die Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (P,Q;a,b) Konkurrenz-Spiel, jedoch nicht strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel. Andernfalls

müßte das Gleichungssystem

$$k_1 a(x_1,y_2) + k_2 b(x_1,y_2) + c_1+c_2 = 2k_1 + 2k_2 + c_1+c_2 = 0$$
$$k_1 a(x_2,y_1) + k_2 b(x_2,y_1) + c_1+c_2 = 4k_1 + 4k_2 + c_1+c_2 = 0$$

eine Lösung (k_1,k_2,c_1,c_2) haben mit $k_1,k_2 \in (0,\infty)$.

Aus der Differenz der Gleichungen folgt ein Widerspruch.

SATZ 4.5:

Sei $\Gamma = (U,V;a,b)$ ein endliches Konkurrenz-Spiel und (ξ_1,η_1) sowie (ξ_2,η_2) seien Gleichgewichtspunkte in Γ.

Dann gilt:

a) (ξ_1,η_2) ist Gleichgewichtspunkt,

b) $a(\xi_1,\eta_1) = a(\xi_2,\eta_2) = a_*(U,V)$,

c) $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ sind Minimaxstrategien.

Beweis:

Im zweiseitigen Konkurrenz-Spiel Γ ergeben sich für jeden Gleichgewichtspunkt aus Definition 4.1 und 1.2 die folgenden Eigenschaften:

Da (ξ_1,η_1) Gleichgewichtspunkt ist, gilt:

$$(4.7)\quad \begin{cases} a(\xi_1,\eta_1) = \max\limits_{\xi\in U} a(\xi,\eta_1) \Longrightarrow b(\xi_1,\eta_1) = \min\limits_{\xi\in U} b(\xi,\eta_1) \\ b(\xi_1,\eta_1) = \max\limits_{\eta\in V} b(\xi_1,\eta) \Longrightarrow a(\xi_1,\eta_1) = \min\limits_{\eta\in V} a(\xi_1,\eta) \end{cases}$$

und daraus folgt speziell:

$$a(\xi_1,\eta_2) \geq a(\xi_1,\eta_1) \geq a(\xi_2,\eta_1)$$
$$b(\xi_2,\eta_1) \geq b(\xi_1,\eta_1) \geq b(\xi_1,\eta_2) \quad .$$

Ebenso erhält man, wenn man die Gleichgewichtspunkteigenschaft von (ξ_2,η_2) ausnutzt,

$$a(\xi_2,\eta_1) \geq a(\xi_2,\eta_2) \geq a(\xi_1,\eta_2)$$
$$b(\xi_1,\eta_2) \geq b(\xi_2,\eta_2) \geq b(\xi_2,\eta_1) \quad .$$

Dann muß aber überall das Gleichheitszeichen stehen, also

$$a(\xi_1,\eta_1) = a(\xi_1,\eta_2) = a(\xi_2,\eta_2) = a(\xi_2,\eta_1)$$
$$b(\xi_1,\eta_1) = b(\xi_1,\eta_2) = b(\xi_2,\eta_2) = b(\xi_2,\eta_1) \ .$$

Mit $a(\xi_2,\eta_2) \geqslant a(\xi,\eta_2)$ für alle $\xi \in U$

gilt $a(\xi_1,\eta_2) \geqslant a(\xi,\eta_2)$ für alle $\xi \in U$

und analog mit

$b(\xi_1,\eta_1) \leqslant b(\xi_1,\eta)$ für alle $\eta \in V$

auch $b(\xi_1,\eta_2) \leqslant b(\xi_1,\eta)$ für alle $\eta \in V$,

damit erfüllt (ξ_1,η_2) die Eigenschaften eines Gleichgewichtspunktes, Teil a) der Behauptung ist bewiesen.

Aus (4.7) folgt

$$(4.8) \quad \max_{\xi \in U} a(\xi,\eta_1) = a(\xi_1,\eta_1) = \min_{\eta \in V} a(\xi_1,\eta)$$

und ferner gilt mit Definition 1.4:

$$\max_{\xi \in U} a(\xi,\eta_1) \geqslant a_*(U,V)$$
$$\min_{\eta \in V} a(\xi_1,\eta) \leqslant a_*(U,V) \ .$$

Daraus folgt mit (4.8):

$$a(\xi_1,\eta_1) = a_*(U,V) \ .$$

Dann gilt

$$a(\xi_1,\eta_1) = a(\xi_2,\eta_2) = a_*(U,V)$$

und Teil b) der Behauptung ist bewiesen.

Allgemein gilt

$$\min_{\eta \in V} a(\xi_1,\eta) \leqslant \max_{\xi \in U} \min_{\eta \in V} a(\xi,\eta) \leqslant \max_{\xi \in U} a(\xi,\eta_1) \ ,$$

nach (4.8) sind überall Gleichheitszeichen zu setzen, also ist ξ_1 Minimaxstrategie des Spielers I.

Analog zeigt man

$$b(\xi_1,\eta_1) = b(\xi_2,\eta_2) = b_*(U,V)$$

sowie:

ξ_2, η_1, η_2 sind Minimaxstrategien.

Damit ist Satz 4.5 vollständig bewiesen.

Bei zweiseitigen Konkurrenz-Spielen sind also alle Gleichgewichtspunkte äquivalent und vertauschbar und die Menge der Gleichgewichtsstrategien eines jeden Spielers ist eine im allgemeinen echte Teilmenge der Menge der Minimaxstrategien. Daß nämlich eine Minimaxstrategie ξ^* nicht notwendig Gleichgewichtsstrategie ist, wird gezeigt mit Hilfe von

Beispiel 7:

Ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel $\sigma_7 = (X,Y;a,b)$ sei gegeben durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Man verifiziert, daß (x_1,y_1) Gleichgewichtspunkt in σ_7 ist. Dann sind die Gleichgewichtsstrategien x_1 und y_1 nach Satz 4.5 auch Minimaxstrategien.

Ferner ist aber auch die Strategie x_2 Minimaxstrategie des Spielers I in σ_7, denn es gilt:

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} a(x,y) = \min_{y\in Y} a(x_2,y) = a(x_2,y_2) = 0 .$$

Andererseits folgt aber aus

$$1 = b(x_2,y_2) = \max_{y\in Y} b(x_2,y) \neq b(x_2,y_1) = 0 ,$$

daß (x_2,y_1) nicht Gleichgewichtspunkt ist, obgleich

(x_2, y_1) ein Paar von Minimaxstrategien darstellt.

Mit den Ergebnissen von Satz 4.5 hat man bereits wesentliche Eigenschaften der zweiseitigen Konkurrenz - Spiele. Eine weitere Eigenschaft der Gleichgewichtsstrategien in zweiseitigen Konkurrenz - Spielen, die mit Hilfe von Satz 4.5 a) gezeigt wird, ist ausgedrückt in

SATZ 4.6:

Sei $(P,Q;a,b)$ ein zweiseitiges Konkurrenz-spiel und es existiere ein Gleichgewichtspunkt (ξ_1, η_1) mit $\xi_1 \in U$, $\eta_1 \in V$. Dann sind die Mengen der Gleichgewichtsstrategien beider Spieler konvex.

Beweis:

Im Beweis beschränkt man sich auf einen der Spieler, etwa Spieler I.

(1) Sei ξ_1 die einzige Gleichgewichtsstrategie von Spieler I. Dann ist die Behauptung trivial.

(2) Seien ξ_1, ξ_2 zwei von einander verschiedene Gleichgewichtsstrategien von Spieler I. Dann gilt für

$$\xi_0 := \lambda \xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \quad \text{mit } 0<\lambda<1$$

nach Satz 4.5 a) und Definition 1.2 :

$$\begin{aligned} a(\xi_0, \eta_1) &= \lambda a(\xi_1, \eta_1) + (1-\lambda) a(\xi_2, \eta_1) \\ &\geq \lambda a(\xi, \eta_1) + (1-\lambda) a(\xi, \eta_1) = a(\xi, \eta_1) \\ &\qquad \text{für alle } \xi \in U \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(\xi_0, \eta_1) &= \lambda b(\xi_1, \eta_1) + (1-\lambda) b(\xi_2, \eta_1) \\ &\geq \lambda b(\xi_1, \eta) + (1-\lambda) b(\xi_2, \eta) = b(\xi_0, \eta) \\ &\qquad \text{für alle } \eta \in V. \end{aligned}$$

Also ist ξ_0 Gleichgewichtsstrategie von Spieler I.
Daraus folgt nach Definition 2.1:
Die Menge der Gleichgewichtsstrategien von Spieler I ist konvex.
Analog verläuft der Beweis für die Konvexität der Menge der Gleichgewichtsstrategien von Spieler II.

KOROLLAR 4.6.1:
Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 ist die Menge der Gleichgewichtspunkte von (P,Q;a,b) konvex.

Beweis:
Nach [12], Kapitel III/§2, Satz 4, Seite 164 gilt:
Seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Dann ist $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ konvex. Ferner bildet jedes Paar von Gleichgewichtsstrategien nach Satz 4.5 a) einen Gleichgewichtspunkt. Daraus folgt die Behauptung.

Für spätere Überlegungen sehr wesentlich ist
SATZ 4.7:
Sei $\bar{\Gamma} = (P,Q;a,b)$ Konkurrenz-Spiel.
Ist $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ mit $\bar{\xi} = (\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_m)$ und $\bar{p}_i > 0$ für ein festes $i \in \{1,\ldots,m\}$ sowie $\bar{\eta} = (\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n)$ mit $\bar{q}_j > 0$ für ein festes $j \in \{1,\ldots,n\}$ ein Gleichgewichtspunkt im $\bar{\Gamma}$, so gilt:

$$(4.9) \quad a(x,\bar{\eta}) \leq a(x_i,\bar{\eta}) = a(\bar{\xi},\bar{\eta}) = a(\bar{\xi},y_j) \leq a(\bar{\xi},y)$$

$$(4.10) \quad b(x,\bar{\eta}) \geq b(x_i,\bar{\eta}) = b(\bar{\xi},\bar{\eta}) = b(\bar{\xi},y_j) \geq b(\bar{\xi},y),$$

für beliebige $x \in X$ und $y \in Y$.

Beweis:

Nach Satz 1.3 gilt:

$$a(x_i,\bar{\eta}) = a(\bar{\varrho},\bar{\eta}) \quad \text{für alle } i:\bar{p}_i > 0$$
$$b(\bar{\varrho},y_j) = b(\bar{\varrho},\bar{\eta}) \quad \text{für alle } j:\bar{q}_j > 0 .$$

Dann folgt nach Definition 4.1 auch:

$$b(x_i,\bar{\eta}) = b(\bar{\varrho},\bar{\eta}) \quad \text{für alle } i:\bar{p}_i > 0$$
$$a(\bar{\varrho},y_j) = a(\bar{\varrho},\bar{\eta}) \quad \text{für alle } j:\bar{q}_j > 0 .$$

Dann ergibt sich die Behauptung nach (4.7) .

KOROLLAR 4.7.1:

Sei $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.
und $(\bar{\varrho},\bar{\eta})$ ein Gleichgewichtspunkt mit $\bar{\varrho} > v$, $\bar{\eta} > v$.
Dann gilt:

(4.11) $a(\varrho,\bar{\eta}) = a(\bar{\varrho},\bar{\eta}) = a(\bar{\varrho},\eta)$

(4.12) $b(\varrho,\bar{\eta}) = b(\bar{\varrho},\bar{\eta}) = b(\bar{\varrho},\eta)$

für beliebige $\varrho \in P$ und $\eta \in Q$.

Existiert also ein streng gemischter Gleichgewichtspunkt $(\bar{\varrho},\bar{\eta})$ im zweiseitigen Konkurrenz-Spiel $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ und wählt einer der beiden Spieler seine Gleichgewichtsstrategie $\bar{\varrho}$ bzw. $\bar{\eta}$, so sind die Auszahlungen a und b unabhängig von der Strategie des Gegenspielers. Wegen Satz 4.5 trifft dies sogar dann zu, wenn einer der beiden Spieler eine beliebige Gleichgewichtsstrategie $\varrho \in P$ bzw. $\eta \in Q$ wählt.

Ob sich die Reduktion von Strategiemengen auf die Eigenschaften eines zweiseitigen Konkurrenz-Spiels auswirkt, wird untersucht in

SATZ 4.8:

Sei $\sigma = (U,V;a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Existiert ein $U_1 \subset U$, so daß gilt: $U \underset{(V)}{\supseteq} U_1$,

dann ist das Teilspiel $(U_1,V;a,b)$ Konkurrenz-Spiel.

Existiert ein $V_1 \subset V$, so daß gilt: $V \underset{(U)}{\supseteq} V_1$,

dann ist das Teilspiel $(U,V_1;a,b)$ Konkurrenz-Spiel.

Beweis:

(1) Es gilt $U \underset{(V)}{\supseteq} U_1$ und damit $U \supsetneq U_1$.

Daraus folgt:

(4.13) $\max\limits_{\varrho\in U} a(\varrho,\sigma) \geqslant \max\limits_{\varrho\in U_1} a(\varrho,\sigma)$ für alle $\sigma\in V$.

Andererseits existiert zu jedem $\varrho\in U-U_1$ ein $\varrho_1\in U_1$ mit der Eigenschaft: $\varrho_1 \underset{(V)}{\rhd} \varrho$, daraus folgt:

(4.14) $\max\limits_{\varrho\in U_1} a(\varrho,\sigma) \geqslant \max\limits_{\varrho\in U} a(\varrho,\sigma)$ für alle $\sigma\in V$.

Aus (4.13) und (4.14) ergibt sich:

(4.15) $\max\limits_{\varrho\in U} a(\varrho,\sigma) = \max\limits_{\varrho\in U_1} a(\varrho,\sigma)$ für alle $\sigma\in V$.

und daraus nach Definition 4.1:

(4.16) $\min\limits_{\varrho\in U} b(\varrho,\sigma) = \min\limits_{\varrho\in U_1} b(\varrho,\sigma)$ für alle $\sigma\in V$,

damit ist das Teilspiel $(U_1,V;a,b)$ Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I .

(2) Wegen $U_1 \subset U$ folgt direkt für jedes $\varrho\in U_1$:

$$\max_{\sigma\in V} b(\varrho,\sigma) = b(\varrho,\sigma(\varrho)) \Longrightarrow \min_{\sigma\in V} a(\varrho,\sigma) = a(\varrho,\sigma(\varrho)) ,$$

damit ist $(U_1,V;a,b)$ auch Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers II; dann ist mit (1) und (2) das Teilspiel $(U_1,V;a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

(3) Vertauscht man die Rollen der Spieler, so ergibt sich analog: $(U,V_1;a,b)$ ist zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

SATZ 4.9:

Sei $\sigma = (U,V;a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, ferner sei $U \underset{(V)}{\supset} U_1$, $V \underset{(U_1)}{\supset} V_1$, $U_1 \underset{(V_1)}{\supset} U_2$, ... , $V_{n-1} \underset{(U_n)}{\supset} V_n$ eine Kette von sukzessiven Reduktionen mit $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(U_n,V_n;a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Beweis:

Man wendet vollständige Induktion an:

Die Verankerung, mit $(U,V;a,b)$ ist auch $(U_1,V;a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, wurde in Satz 4.8 bewiesen.

Nimmt man an, daß mit $(U,V;a,b)$ auch die Teilspiele $(U_1,V_1;a,b)$, $(U_2,V_1;a,b)$, $(U_2,V_2;a,b)$, ... , $(U_n,V_{n-1};a,b)$ zweiseitige Konkurrenz-Spiele sind, so folgt die Eigenschaft für $(U_n,V_n;a,b)$, Konkurrenz-Spiel zu sein, aus Satz 4.8, indem man U durch U_n, ferner V durch V_{n-1} und V_1 durch V_n ersetzt.

Also geht die Eigenschaft, Konkurrenz-Spiel zu sein, bei Reduktion nicht verloren.

Die gemischte Erweiterung $\bar{\sigma} = (P,Q;a,b)$ eines endlichen Spiels $\sigma = (X,Y;a,b)$ sei zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, dann auch σ nach Satz 4.2 .

Dann gilt

KOROLLAR 4.9.1:

Jedes Teilspiel (P',Q';a,b) von (P,Q;a,b), welches das reduzierte Teilspiel ($P(X_r),Q(Y_r)$; a,b) von (P,Q;a,b) enthält, ist zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Beweis:

Wegen $P(X_r) \subset P' \subset P$ gilt für beliebiges $\sigma \in Q$

$$\max_{\varrho \in P(X_r)} a(\varrho,\sigma) \leq \max_{\varrho \in P'} a(\varrho,\sigma) \leq \max_{\varrho \in P} a(\varrho,\sigma) \ .$$

Andererseits folgt aus Satz 4.8 durch sukzessive Anwendung von (4.14):

$$\max_{\varrho \in P(X_r)} a(\varrho,\sigma) \geq \max_{\varrho \in P} a(\varrho,\sigma) \ .$$

Dann gelten überall Gleichheitszeichen und mit Definition 4.1 folgt aus

$$\max_{\varrho \in P} a(\varrho,\sigma) = \max_{\varrho \in P'} a(\varrho,\sigma) = a(\varrho',\sigma)$$

$$\min_{\varrho \in P} b(\varrho,\sigma) = \min_{\varrho \in P'} b(\varrho,\sigma) = b(\varrho',\sigma) \ .$$

Also ist (P',Q';a,b) konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I. Analog zeigt man, daß (P',Q';a,b) auch Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers II ist und daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Damit hat man eine wesentliche Aussage gewonnen über die Eigenschaft on Teilspielen zweiseitiger Konkurrenz-Spiele.

Im folgenden sei angenommen, $(P,Q;a,b)$ sei das reduzierte Spiel, d.h., es existiert kein $X' \subset X$ mit: $X \underset{(Q)}{\supseteq} X'$

und kein $Y' \subset Y$ mit: $Y \underset{(P)}{\supseteq} Y'$,

man sagt auch, $(P,Q;a,b)$ ist nicht reduzierbar (vgl. dazu Definition 1.8).

Dann gilt nach Korollar 3.12.1:

(4.17) $\quad \emptyset \neq Q_a(x) \not\subset \mathrm{Rd}\, Q \quad$ für alle $x \in X$;

analog, falls man die Rollen der Spieler vertauscht:

(4.18) $\quad \emptyset \neq P_b(y) \not\subset \mathrm{Rd}\, P \quad$ für alle $y \in Y$.

Da $\bar{\Gamma}$ Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I ist, gilt nach (2.1) und (2.2):

(4.19) $\quad Q_a(\varrho) \subset Q_b(\varrho) \quad$ für alle $\varrho \in P$.

Da $\bar{\Sigma}$ Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers II ist, gilt nach (2.3) und (2.4):

(4.20) $\quad P_b(\sigma) \subset P_a(\sigma) \quad$ für alle $\sigma \in P$.

Ist $\bar{\Sigma}$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, so gilt (4.19) und (4.20). Dann folgt aus (4.17) bzw. aus (4.18):

(4.21) $\quad \emptyset \neq Q_b(x) \not\subset \mathrm{Rd}\, Q$

(4.22) $\quad \emptyset \neq P_a(y) \not\subset \mathrm{Rd}\, P$

Allerdings gilt nicht notwendig, daß die Dimension von $Q_a(x)$ bzw. $Q_b(x)$ für beliebiges $x \in X$ gleich $n-1$, bzw. die Dimension von $P_a(y)$ oder $P_b(y)$ für beliebiges $y \in Y$ gleich $m-1$ ist. So kommt man zu

DEFINITION 4.2:

(1) $x_s \in X$ heißt <u>quasidominiert bzgl. $V \subset Q$</u>, wenn ein $\varrho^0 := (p_1^0,\ldots,p_m^0) \in P$ mit $p_s^0 = 0$ existiert, so daß gilt:

$$a(x_s,\sigma_\eta) = a(\varrho^0,\sigma_\eta) \quad \text{für alle } \sigma_\eta \in V.$$

(2) Ebenso heißt $y_t \in Y$ <u>quasidominiert bzgl. $U \subset P$</u>, wenn ein $\sigma_\eta{}^0 := (q_1^0,\ldots,q_n^0) \in Q$ mit $q_t^0 = 0$ existiert, so daß gilt:

$$b(\varrho,y_t) = b(\varrho,\sigma_\eta{}^0) \quad \text{für alle } \varrho \in U.$$

SATZ 4.10:

Sei $(P,Q;a,b)$ ein nicht reduzierbares, zweiseitiges Konkurrenz-Spiel und existieren Strategien $x_s \in X$ und $\varrho' \in P$ mit $\varrho' \neq x_s$, so daß gilt:

(4.23) $b(x_s,y) = b(\varrho',y)$ für alle $y \in Y$.

dann gilt:

(4.24) $a(x_s,y) = a(\varrho',y)$ für alle $y \in Y$.

Beweis:

$(P,Q;a,b)$ ist nicht reduzierbar, dann gilt nach (4.18):

$$P_b(y) \neq \emptyset \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Also existiert zu jedem $j=1,\ldots,n$ ein $\varrho(j) \in P$ mit $\varrho(j) := (p_1,\ldots,p_m)$, so daß gilt:

(4.25) $\max\limits_{y \in Y} b(\varrho(j),y) = b(\varrho(j),y_j)$.

Wegen (4.18) gilt auch

$$P_b(y) \not\subset \text{Rd } P \quad \text{für alle } y \in Y$$

und damit existiert zu jedem $j=1,\ldots,n$ sogar ein $\varrho(j) \succ \nu$, so daß (4.25) erfüllt ist.

Aus (4.23) folgt ferner:

(4.26) $p_s(b(\varrho',y)-b(x_s,y)) = 0$ für alle $y \in Y$,

wobei p_s die s-te Komponente von $\varrho(j) \succ \nu$ ist.

Seien $\varrho' := (p'_1,\ldots,p'_m)$ und $\tilde{\varrho}(j) := (\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_m)$ mit

$$\tilde{p}_i := \begin{cases} 0 & \text{für } i=s \\ p_i + p_s p'_i & \text{sonst} \end{cases},$$

dann ergibt sich aus (4.25) und (4.26):

$$\begin{aligned} &\max_{y\in Y} b(\tilde{\varrho}(j),y) = \\ &= \max_{y\in Y} \left(b(\varrho(j),y) + p_s(b(\varrho',y)-b(x_s,y)) \right) \\ &= \max_{y\in Y} b(\varrho(j),y) = b(\varrho(j),y_j) \\ &= b(\varrho(j),y_j) + p_s(b(\varrho',y_j)-b(x_s,y_j)) \\ &= b(\tilde{\varrho}(j),y_j) . \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Definition 4.1:

$$a(\varrho(j),y_j) = \min_{y\in Y} a(\varrho(j),y) = \min_{y\in Y} a(\tilde{\varrho}(j),y)$$

$$= a(\tilde{\varrho}(j),y_j) .$$

Also gilt nach der Definition von $\varrho(j)$ und $\tilde{\varrho}(j)$:

$$\begin{aligned} &a(\varrho(j),y_j) - a(\tilde{\varrho}(j),y_j) \\ &= p_s(a(x_s,y_j) - a(\varrho',y_j)) = 0. \end{aligned}$$

Da x_s und ϱ' unabhängig sind von j, folgt hieraus die Behauptung (4.24).

SATZ 4.11:

Sei (P,Q;a,b) ein reduziertes zweiseitiges Konkurrenz-Spiel und $x_s \in X$ sei quasidominiert bzgl. Q, dann existiert ein $\varphi' \in P$ mit $p'_s = 0$, so daß die Bedingungen (4.23) und (4.24) erfüllt sind.

Beweis:

Nach Definition 4.2 gilt mit (2.1) und Satz 2.5:

$$Q_a(x_s) = Q_a(\varphi^0) = \bigcap_{i:p_i^0>0} Q_a(x_i) .$$

Daraus folgt nach Korollar 2.5.2 c):

$$Q = \bigcup_{i \neq s} Q_a(x_i)$$

und wegen (2.5) und (4.19) auch

(4.27) $$Q = \bigcup_{i \neq s} Q_b(x_i) .$$

Dann unterscheidet man zwei Fälle:

(1) Sei $\dim Q_b(x_s) < n-1$.

Dann existiert nach Satz 3.14 ein $\varphi' := (p'_1,\ldots,p'_m) \in P$ mit $\varphi' \neq x_s$ und $p'_i \begin{cases} > 0 \text{ für } i: \dim Q_b(x_i)=n-1 \\ = 0 \text{ sonst} , \end{cases}$

so daß (4.23) erfüllt ist, andernfalls wäre (P,Q;a,b) nicht reduziert.

(2) Sei $\dim Q_b(x_s) = n-1$.

Dann gilt nach Korollar 1.10.1, (4.19) und (4.27):

$$Q = \bigcup_{i \neq s:\dim Q_b(x_i)=n-1} Q_b(x_i) .$$

Nach Satz 2.9 existiert ein $j \neq s$: $Q_b(x_j) = Q_b(x_s)$.

Andernfalls dürfte kein innerer Punkt von $Q_b(x_s)$ in einer der Mengen $Q_b(x_i)$ mit $i \neq s$: $\dim Q_b(x_i)=n-1$ enthalten sein und damit auch nicht in $\bigcup_{i\neq s:\dim Q_b(x_i)=n-1} Q_b(x_i) = Q$.

Es gilt also

$$\dim Q_b(x_s) = \dim \left(Q_b(x_s) \cap Q_b(x_j) \right) \subset \{ \sigma\eta \in Q: b(x_s,\eta) = b(x_j,\eta) \} = n-1 .$$

Daraus folgt mit

$$p_i' = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

daß auch hier (4.23) erfüllt ist.

Damit sind aber die Voraussetzungen zu Satz 4.10 vollständig, es gilt daher auch (4.24) .

Das Ergebnis von Satz 4.11 kann so interpretiert werden: Ist x_s bzgl. Q quasidominiert, so existiert ein $\xi' \in P$, so daß die Auszahlungen a und b bei Einsatz von ξ' für beliebiges $\eta \in Q$ gleich sind den Auszahlungen a und b bei Einsatz von x_s.

DEFINITION 4.3:

$\xi_1 \cdot \xi_2$ aus P heißen <u>äquivalent bzgl. $V \subset Q$</u> ($\xi_1 \underset{(V)}{\sim} \xi_2$)

wenn $\wedge \eta \in V$: $a(\xi_1,\eta) = a(\xi_2,\eta)$
$b(\xi_1,\eta) = b(\xi_2,\eta)$

Ebenso heißen η_1,η_2 aus Q <u>äquivalent bzgl. $U \subset P$</u> ($\eta \underset{(U)}{\sim} \eta$)

wenn $\wedge \xi \in U$: $a(\xi,\eta_1) = a(\xi,\eta_2)$
$b(\xi,\eta_1) = b(\xi,\eta_2)$

In einem zweiseitigen Konkurrenz-Spiel, das reduziert ist, existiert also zu jeder bzgl. Q quasidominierten Strategie $x_s \in X$ ein $\xi' \in P$, so daß ξ' und x_s äquivalente Strategien sind.

Analog existiert zu jeder bzgl. P quasidominierten Strategie $y_t \in Y$ ein $\eta' \in Q$, so daß η' und y_t äquivalente Strategien sind.

Dies gilt nicht notwendig für allgemeine Spiele.

Beispiel 8:

Sei $\bar{\Gamma}_8 = (P,Q;a,b)$ gegeben durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann besitzt Spieler I nur quasidominierte Strategien, andererseits gibt es keine zwei Strategien aus P, die äquivalent sind.

Mit dem Begriff der Äquivalenz von Strategien kann man (P,Q;a,b) noch weiter reduzieren.

DEFINITION 4.4:

Sei (P,Q;a,b) ein endliches Spiel mit $P_1, P_2, U \subset P$, $Q_1, Q_2, V \subset Q$.

Dann heißt P_1 <u>quasireduzierbar</u> auf P_2 <u>bzgl. V</u> ($P_1 \underset{(V)}{\approx} P_2$),

wenn gilt:

a) $P_1 \supset P_2$,

b) zu jedem $\xi_2 \in P_1 - P_2$ existiert ein $\xi_1 \in P_2$ mit $\xi_1 \underset{(V)}{\sim} \xi_2$.

Ebenso heißt Q_1 <u>quasireduzierbar</u> auf Q_2 <u>bzgl. U</u> ($Q_1 \underset{(U)}{\approx} Q_2$),

wenn gilt:

a) $Q_1 \supset Q_2$,

b) zu jedem $\eta_2 \in Q_1 - Q_2$ existiert ein $\eta_1 \in Q_2$ mit $\eta_1 \underset{(U)}{\sim} \eta_2$.

Analog zu Satz 1.4 ergibt sich

SATZ 4.12:

Sei $(P,Q;a,b)$ ein reduziertes, zweiseitiges Konkurrenz-Spiel mit $X \subset U \subset P$ und $Y \subset V \subset Q$. Dann gilt:

a) $\varrho_1 \underset{(V)}{\sim} \varrho_2 \iff \varrho_1 \underset{(Y)}{\sim} \varrho_2$ bzw. $\sigma_1 \underset{(U)}{\sim} \sigma_2 \iff \sigma_1 \underset{(X)}{\sim} \sigma_2$.

b) $P_1 \underset{(V)}{\approx} P_2 \iff P_1 \underset{(Y)}{\approx} P_2$ bzw. $Q_1 \underset{(U)}{\approx} Q_2 \iff Q_1 \underset{(X)}{\approx} Q_2$.

Beweis:

a) Sei $\varrho_1 \underset{(V)}{\sim} \varrho_2$.

Dann folgt wegen $Y \subset V$ die Behauptung $\varrho_1 \underset{(Y)}{\sim} \varrho_2$.

Sei $\varrho_1 \underset{(Y)}{\sim} \varrho_2$.

Dann gilt für beliebiges $\sigma \in V$:

$$a(\varrho_1,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} q_j a(\varrho_1,y_j) = \sum_{j=1}^{n} q_j a(\varrho_2,y_j) = a(\varrho_2,\sigma)$$

und ebenso

$b(\varrho_1,\sigma) = b(\varrho_2,\sigma)$, also folgt $\varrho_1 \underset{(V)}{\sim} \varrho_2$.

b) Der Beweis $\sigma_1 \underset{(U)}{\sim} \sigma_2 \iff \sigma_1 \underset{(X)}{\sim} \sigma_2$ verläuft analog.

Die Aussagen von Teil b) ergeben sich direkt aus Definition 4.4.

Sei $(X_r,Y_r;a,b)$ ein reduziertes Konkurrenz-Spiel und $(P(X_r),Q(Y_r);a,b)$ seine gemischte Erweiterung.

Reduziert man folgendermaßen weiter (vgl. dazu Seite 23):

$X_r \underset{(Y_r)}{\approx} X_{r+1}$, $Y_r \underset{(X_{r+1})}{\approx} Y_{r+1}$, $X_{r+1} \underset{(Y_{r+1})}{\approx} X_{r+2}$, usw....

so existiert wegen der Endlichkeit der Mengen X_r und Y_r ein $v \in \mathbb{N}$ mit $v \geq r$, so daß X_v bzgl. Y_v, sowie Y_v bzgl. X_v nicht quasireduzierbar sind. Bezeichnet man die konvexe Hülle von X_v mit $P(X_v)$, von Y_v mit $Q(Y_v)$, so ist das Spiel $(P(x_v), Q(Y_v); a, b)$ die gemischte Erweiterung von $(X_v, Y_v; a, b)$.

DEFINITION 4.5:
Das Teilspiel $(P(X_v), Q(Y_v); a, b)$ von $(P(X_r), Q(Y_r); a, b)$ heißt das <u>vollständig reduzierte</u> Teilspiel von $(P(x_r), Q(y_r); a, b)$.

SATZ 4.13:
Das vollständig reduzierte Teilspiel eines zweiseitigen Konkurrenz-Spiels ist zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Der Beweis verläuft ganz analog zu Satz 4.8 und Satz 4.9.

Damit erhält man für die in (2.1)-(2.4) definierten Mengen $Q_a(x)$, $Q_b(x)$, $P_a(x)$, $P_b(x)$ die folgenden Aussagen:

SATZ 4.14:
Sei $(P, Q; a, b)$ ein vollständig reduziertes, zweiseitiges Konkurrenz-Spiel. Dann gilt für alle $x \in X$, $y \in Y$:

(4.28) $\dim Q_a(x) = n-1$ bzw. $\dim P_b(y) = m-1$,

(4.29) $Q_a(x) = Q_b(x)$ bzw. $P_a(y) = P_b(y)$.

Beweis:

a) Angenommen, es existiert ein $x_s \in X$ mit $\dim Q_a(x_s) \neq n-1$.
Dann existiert nach Satz 3.12 ein $\varrho' \in P$ mit $\varrho' \neq x_s$, so daß gilt:

$$a(\varrho', y) \geq a(x_s, y) \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Dann ist aber x_s bzgl. Y bzw. Q dominiert oder quasi-dominiert, im Widerspruch zur Voraussetzung, also gilt (4.28), denn der Beweis für $\dim P_b(y) = m-1$ verläuft analog.

b) Nach (4.19) gilt für alle $x \in X$: $Q_b(x) \supset Q_a(x)$.
Angenommen, es existiert ein $x_i \in X$ mit : $Q_b(x_i) \supsetneq Q_a(x_i)$, dann gibt es einen Punkt $\sigma_o \in Q$ mit: $\sigma_o \in Q_b(x_i)$, hingegen $\sigma_o \notin Q_a(x_i)$. Wegen der Abschlossenheit von $Q_a(x_i)$ und $Q_b(x_i)$ ist σ_o als innerer Punkt von $Q_b(x_i)$ wählbar, es existiert bzgl. der vom $\mathbb{R}^n$ in $L(Q_b(x_i)) = L(Q)$ (wegen (4.28)) induzierten Topologie eine Kugelumgebung $U(\sigma_o) \subset Q_b(x_i) \subset Q$ zu σ_o mit $U(\sigma_o) \cap Q_a(x_i) = \emptyset$.

Wegen $Q = \bigcup_{x \in X} Q_a(x)$ ist $U(\sigma_o)$ Teilmenge von $\bigcup_{x \neq x_i} Q_a(x)$ und damit auch Teilmenge von $\bigcup_{x \neq x_i} Q_b(x)$.

Damit existiert ein $j \neq i$ mit

$$\dim \left(U(\sigma_o) \cap Q_b(x_j) \right) = n-1 .$$

Daraus folgt

$$\dim \left(Q_b(x_i) \cap Q_b(x_j) \right) = n-1 .$$

Wegen $Q_b(x_i) \cap Q_b(x_j) \subset \{ \sigma \in Q: b(x_i, \sigma) = b(x_j, \sigma) \}$ folgt :

(4.30) $b(x_i,\sigma) = b(x_j,\sigma)$ für alle $\sigma \in Q$

und daraus nach Satz 4.10 auch

$$a(x_i,\sigma) = a(x_j,\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in Q$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß (P,Q;a,b) vollständig reduziert ist. Daraus folgt die Behauptung (4.29), der Beweis für $P_a(y) = P_b(y)$ verläuft analog.

Dieser Satz 4.14 besagt folgendes:

KOROLLAR 4.14.1:

Sei (P,Q;a,b) ein vollständig reduziertes Konkurrenz-Spiel. Dann gilt anstatt der Bedingungen (4.1) bzw. (4.2) in Definition 4.1 (Seite 68):

(4.31) Sei $\sigma \in Q$ beliebig:

$$\max_{\varrho \in P} a(\varrho,\sigma) = a(\varrho(\sigma),\sigma) \iff \min_{\varrho \in P} b(\varrho,\sigma) = b(\varrho(\sigma),\sigma) .$$

(4.32) Sei $\varrho \in P$ beliebig:

$$\max_{\sigma \in Q} b(\varrho,\sigma) = b(\varrho,\sigma(\varrho)) \iff \min_{\sigma \in Q} a(\varrho,\sigma) = a(\varrho,\sigma(\varrho)) .$$

Die Aussagen von Satz 4.14 sollen noch ergänzt werden in

KOROLLAR 4.14.2:

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 gilt:

a) $Q_a(x_i) \cap Q_b(x_j) \neq \emptyset$ für $i \neq j \implies \dim (Q_a(x_i) \cap Q_a(x_j)) < n-1$

b) $P_b(y_k) \cap P_b(y_l) \neq \emptyset$ für $k \neq l \implies \dim (P_b(y_k) \cap P_b(y_l)) < m-1$

Beweis:

Angenommen, es gilt:

$$\dim \left(Q_a(x_i) \cap Q_a(x_j) \right) = n-1 \quad ,$$

so erhält man mit (4.30) einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß (P,Q;a,b) vollständig reduziert ist.

Analog folgt die Behauptung von Korollar 4.14.2 b).

5.) Zusammenhang reduzierter Teilspiele von Konkurrenz-Spielen mit Nullsummen-Spielen.

In Abschnitt 2 wurde der Dimensionsbegriff lediglich für konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eingeführt (vgl. Definition 2.4), damit wurden Aussagen über die in (2.1) definierten konvexen Polyeder $Q_a(\varrho)$ mit $\varrho \in P$ gewonnen. Im folgenden soll entsprechend dazu für eine endliche Vereinigung von konvexen Polyedern, also hier für eine Menge der Form $\bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\varrho_i)$ eine Dimension erklärt werden. Dies ist erforderlich, da die Vereinigung konvexer Polyeder nicht notwendig konvex ist.

BEZEICHNUNG:

Eine Menge der Form $C := \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\varrho_i)$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\varrho_i \in P$ für alle $i=1,\ldots,m$ heißt Polyederverein.

SATZ 5.1:

Seien C_1 und C_2 Polyedervereine. Dann gilt:

a) $C_1 \cup C_2$ ist Polyederverein ,

b) $C_1 \cap C_2$ ist Polyederverein .

Beweis:

Sei $C_1 := \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\varrho_i)$, $C_2 := \bigcup_{j=1}^{l} Q_a(\varrho'_j)$.

a) Dann ist

$$C_1 \cup C_2 = \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\mathfrak{P}_i) \cup \bigcup_{i=1}^{l} Q_a(\mathfrak{P}'_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m+l} Q_a(\mathfrak{P}_i)$$

mit $Q_a(\mathfrak{P}_{m+i}) := Q_a(\mathfrak{P}'_i)$ für $i=1,\ldots,l$

ebenfalls ein Polyederverein.

b) Sei $\mathfrak{P}_i := (p_{i1},\ldots,p_{im})$ und $\mathfrak{P}'_j := (p'_{j1},\ldots,p'_{jm})$.

Dann gilt:

$$C_1 \cap C_2 = \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\mathfrak{P}_i) \cap \bigcup_{j=1}^{l} Q_a(\mathfrak{P}'_j)$$

$$= \bigcup_{i,j} (Q_a(\mathfrak{P}_i) \cap Q_a(\mathfrak{P}'_j))$$

$$= \bigcup_{i,j} \Big(\overbrace{\qquad}^{\mu: p_{i\mu}>0} Q_a(x_\mu) \cap \overbrace{\qquad}^{\mu: p'_{j\mu}>0} Q_a(x_\mu) \Big)$$

(nach Satz 2.5)

$$= \bigcup_{i,j} \overbrace{\qquad\qquad}^{\mu:(p_{i\mu}>0 \wedge p'_{j\mu}>0)} Q_a(x_\mu)$$

$$= \bigcup_{i,j} Q_a(\mathfrak{P}_{ij}) ,$$

wobei $\mathfrak{P}_{ij} := (p^1_{ij},\ldots,p^m_{ij})$ mit

$$p^{\mu}_{ij} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für alle } \mu: p_{i\mu}>0 \vee p'_{j\mu}>0 \\ = 0 & \text{für alle } \mu: p_{i\mu} = p'_{j\mu} = 0 \end{cases}$$

eine Strategie aus P darstellt. Daraus folgt, daß auch $C_1 \cap C_2$ Polyederverein ist.

Bevor die Dimension eines Polyedervereins erklärt wird, soll noch ein Satz eingeschoben werden, der für die nachfolgende Definition von Bedeutung sein wird.

SATZ 5.2:

Es sei C ein Polyederverein und gilt: $\emptyset \neq C \subset Q$.

Ferner werde C durch die nichtleeren Mengen $Q_a(\mathfrak{F}_1),\ldots,$ $Q_a(\mathfrak{F}_m)$ sowie durch die nichtleeren Mengen $Q_a(\mathfrak{F}'_1),\ldots,Q_a(\mathfrak{F}'_l)$ überdeckt, so daß gilt:

$$C = \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\mathfrak{F}_i) = \bigcup_{i=1}^{l} Q_a(\mathfrak{F}'_i) .$$

Dann gilt:

$$\max_{1\leq i\leq m} (\dim Q_a(\mathfrak{F}_i)) = \max_{1\leq i\leq l} (\dim Q_a(\mathfrak{F}'_i)) .$$

Beweis:

O.B.d.A. sei $\max\limits_{1\leq i\leq m} (\dim Q_a(\mathfrak{F}_i)) = \dim Q_a(\mathfrak{F}_1) = k \geq 0$

$\max\limits_{1\leq i\leq l} (\dim Q_a(\mathfrak{F}'_i)) = \dim Q_a(\mathfrak{F}'_1) = n \geq 0$

Nimmt man ferner o.B.d.A. an, daß $k > n$ ist, so folgt nach Satz 2.8 a):

$$\overset{o}{Q_a(\mathfrak{F}_1)} \cap Q_a(\mathfrak{F}'_i) = \emptyset \quad \text{für alle } i = 1,\ldots,l ,$$

damit gilt auch:

$$\overset{o}{Q_a(\mathfrak{F}_1)} \cap \bigcup_{i=1}^{l} Q_a(\mathfrak{F}'_i) = \emptyset .$$

Wegen $Q_a(\mathfrak{F}_1) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_a(\mathfrak{F}_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{l} Q_a(\mathfrak{F}'_i)$ folgt:

$$\overset{o}{Q_a(\mathfrak{F}_1)} = \emptyset .$$

Dann erhält man aus Satz 2.3

$$\dim Q_a(\mathfrak{F}_1) = 0 ,$$

im Widerspruch zur Annahme $k > n \geq 0$.

Damit kommt man zu

DEFINITION 5.1:

Ein Polyederverein C hat die Dimension n, wenn aus

$$C := \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(\mathfrak{P}_i) \quad \text{folgt:} \quad \max_{1 \leq i \leq m} (\dim Q_a(\mathfrak{P}_i)) = n \ .$$

Die Überdeckung von C durch die Mengen $Q_a(\mathfrak{P}_1), \ldots, Q_a(\mathfrak{P}_m)$ ist nicht notwendig eindeutig, jedoch ergibt sich nach Satz 5.2 immer dieselbe Dimension für C, unabhängig von der Überdeckung, von der man ausgeht.

SATZ 5.3:

Es sei C_o ein konvexes Polyeder und C_1, C_2 Polyedervereine. Ferner soll gelten:

$$C_o = C_1 \cup C_2 \quad \text{und} \quad \dim C_i = k > 0 \quad \text{für } i=0,1,2.$$

Daraus folgt:

$$\dim (C_1 \cap C_2) \geq k-1 \ .$$

Beweis:

Angenommen, es sei

$$\dim (C_1 \cap C_2) = k' < k-1 \ .$$

Dann existieren unabhängige Punkte $\mathfrak{z}_o, \ldots, \mathfrak{z}_{k'}$ mit $\mathfrak{z}_i \in C_1 \cap C_2$ für alle $i=0,\ldots,k'$. Wegen

$$\dim C_1 = \dim C_2 = k$$

existieren $\mathfrak{z}_{k'+1}, \ldots, \mathfrak{z}_k$, so daß $\mathfrak{z}_o, \ldots, \mathfrak{z}_k$ unabhängige Punkte sind mit $\mathfrak{z}_i \in C_1 \cup C_2$ für alle $i=0,\ldots,k$.

Dabei sind die Punkte $\mathfrak{z}_{k'+1},\dots,\mathfrak{z}_k$ so wählbar, daß $\mathfrak{z}_1 \in C_1, \mathfrak{z}_1 \notin C_2$ und $\mathfrak{z}_{1'} \in C_2, \mathfrak{z}_{1'} \notin C_1$ für mindestens ein $1 \in \{k'+1,\dots,k\}$ und $1' \in \{k'+1,\dots,k\}$. Dies ist immer möglich wegen $k' < k-1$.

(1) Es existiert ein $t \in (0,1)$, so daß gilt:

$$\mathfrak{z} := t\mathfrak{z}_1 + (1-t)\mathfrak{z}_{1'} \in C_1 \cap C_2 .$$

Ferner gilt wegen der Unabhängigkeit der Punkte $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_k$ auch $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}_0$.

Wegen $\dim(C_1 \cap C_2) = \dim L(C_1 \cap C_2) = k'$ bilden die Vektoren $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_{k'}-\mathfrak{z}_0$ eine Basis von $L(C_1 \cap C_2)$.

Dann gilt die Darstellung

$$\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0 = \sum_{i=1}^{k'} t_i(\mathfrak{z}_i-\mathfrak{z}_0) \text{ mit } t_i \neq 0$$

für mindestens ein i,

oder

$$\sum_{i=1}^{k'} t_i(\mathfrak{z}_i-\mathfrak{z}_0) - t(\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0) - (1-t)(\mathfrak{z}_{1'}-\mathfrak{z}_0) = \mathfrak{o}.$$

Damit wären die Vektoren $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_{k'}-\mathfrak{z}_0,\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_0,\mathfrak{z}_{1'}-\mathfrak{z}_0$ linear abhängig im Widerspruch zu der Unabhängigkeit der Punkte $\mathfrak{z}_0,\dots,\mathfrak{z}_{k'},\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_{1'}$.

(2) Also gilt für alle $t \in (0,1)$

$$\mathfrak{z} = t\mathfrak{z}_1 + (1-t)\mathfrak{z}_{1'} \notin C_1 \cap C_2 .$$

Definiert man

$$Z := \{\mathfrak{z} \in C_0 : \mathfrak{z} = t\mathfrak{z}_1 + (1-t)\mathfrak{z}_{1'} \text{ mit } t \in [0,1]\},$$

so ist Z eine abgeschlossene Menge der Dimension 1, also

eine Strecke, die alle Punkte zwischen ζ_1 und $\zeta_{1'}$ enthält, einschließlich der beiden Randpunkte ζ_1 und $\zeta_{1'}$. Damit sind auch die Durchschnitte $C_1 \cap Z$ sowie $C_2 \cap Z$ abgeschlossen und nicht leer, hingegen ist

$$(C_1 \cap Z) \cap (C_2 \cap Z) = C_1 \cap C_2 \cap Z = \emptyset .$$

Wegen $Z = (C_1 \cap Z) \cup (C_2 \cap Z)$ bedeutet dies einen Widerspruch zum topologischen Zusammenhang von Z.

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung von Satz 5.3 .

Für die weitere Behandlung des vollständig reduzierten Konkurrenz-Spieles (P,Q;a,b) sollen einige elementare graphentheoretische Hilfsmittel bereitgestellt werden (vgl. hierzu I3I, Teil 1, Abschnitt 1-7, Seite 18-31 oder I9I, 1. Kapitel, Seite 1-18.)

Unter einem endlichen Graphen versteht man eine endliche, nichtleere Menge von Punkten, die durch endlich viele Strecken miteinander verbunden sind. Die Punkte werden als Knoten, die Strecken als Kanten des Graphen bezeichnet. Ist ein Knoten mit sich selbst durch eine Kante verbunden, so spricht man von einer Schleife.

Um zu einer formalen Definition eines endlichen Graphen zu gelangen, wird der Begriff des ungeordneten Produktes einer Menge mit sich selbst eingeführt.

DEFINITION 5.2:

Eine Menge $M \& M := \{\{m_1,m_2\} : m_1,m_2 \in M\}$ heißt das ungeordnete Produkt einer Menge M mit sich selbst.

Es gilt also für je zwei Elemente $\{m_1,m_2\}$ und $\{n_1,n_2\}$ aus M & M:

$$\{m_1,m_2\} = \{n_1,n_2\} :\Longleftrightarrow (m_1 = n_1 \wedge m_2 = n_2 \vee (m_1 = n_2 \wedge m_2 = n_1)) .$$

DEFINITION 5.3:

Das Tripel (V,E,f) heißt ein endlicher Graph, wenn V eine endliche, nichtleere Menge von Knoten, E eine endliche Menge von Kanten, sowie $f: E \longrightarrow V\&V$ eine Abbildung von E in das ungeordnete Produkt von V mit sich selbst darstellt.

Ist $e \in E$ und $v_1,v_2 \in V$, so daß gilt:

$$f(e) = \{v_1,v_2\} ,$$

so heißen die Knoten v_1 und v_2 benachbart oder auch durch die Kante $e \in E$ verbunden; die Kante e heißt inzident mit v_1 und v_2 und wird im folgenden auch mit $\overline{v_1v_2}$ bezeichnet.

Es sei noch vermerkt, daß zwar die Menge E, aber nicht V leer sein kann.

Ein Knoten $v_i \in V$ heißt isoliert, wenn es kein $e \in E$ gibt mit $f(e) = \{v,v_i\}$ für beliebiges $v \in V$.

Ein Graph $G := (V,E,f)$ mit $E = \emptyset$ besitzt nur isolierte Knoten und heißt entartet.

In einem Graphen kann man, mit einem gegebenen Knoten beginnend, eine Folge von Kanten kontinuierlich durchlaufen.

DEFINITION 5.4:
Eine endliche Folge $(e_1,\ldots,e_n)$ mit $e_i \in E$ für alle $i=1,\ldots,n$ von Kanten eines Graphen (V,E,f) heißt eine Kantenfolge der Länge n, wenn eine Folge von n+1 Knoten $v_o,\ldots,v_n$, also mit $v_j \in V$ für alle $j=o,\ldots,n$ existiert, so daß gilt:

$$f(e_i) = \{v_{i-1},v_i\} \quad \text{für alle } i=1,\ldots,n .$$

Man schreibt diese Kantenfolge auch in der Form $\overline{v_o v_1 \ldots v_n}$.
Die Kantenfolge $(e_1,\ldots,e_n)$ heißt offen für $v_o \neq v_n$, sonst abgeschlossen.

DEFINITION 5.5:
Gilt für zwei Kanten e_i, e_j einer Kantenfolge jeweils $e_i \neq e_j$, so heißt die Kantenfolge ein Kantenzug.
Gilt für je zwei Knoten v_i, v_j eines Kantenzuges $v_i \neq v_j$, so heißt der Kantenzug ein Weg.

Damit gilt:
Ist eine Kantenfolge $\overline{v_o v_1 v_2 \ldots v_n}$ ein Weg, so ist sie offen, d.h., es gilt $v_o \neq v_n$.
Ferner ist jede Kante, die keine Schleife ist, ein Weg der Länge 1 .

DEFINITION 5.6:

Ein Graph G = (V,E,f) heißt zusammenhängend, wenn sich je zwei verschiedene Knoten $v_i, v_j \in V$ durch mindestens einen eg verbinden lassen.

SATZ 5.4:

Gegeben sei eine offene Kantenfolge, welche die Knoten v_o und v_n verbindet. Dann bilden gewisse Kanten dieser Folge einen Weg, der ebenfalls v_o und v_n verbindet.

Zum Beweis siehe I9I, Kapitel I, § 2, Satz 3, Seite 7 .

Man betrachtet nun eine binäre Relation R, welche auf der Menge V der Knoten folgendermaßen erklärt ist:

DEFINITION 5.7:

Es gilt v_1 R v_2 genau dann, wenn entweder $v_1 = v_2$, oder v_1 und v_2 durch einen Weg miteinander verbunden sind.

Dann gilt

SATZ 5.5:

Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Nach Definition 5.7 gilt v R v für alle $v \in V$, also ist R reflexiv.

Ist $v_1 \neq v_2$ und sind v_1 und v_2 durch einen Weg verbunden, so gilt v_1 R v_2, dies ist äquivalent mit v_2 R v_1, R ist symmetrisch.

Seien v_1, v_2, v_3 paarweise verschieden und gilt $v_1 \, R \, v_2$, sowie $v_2 \, R \, v_3$. Dann existiert eine offene Kantenfolge, die v_1 und v_3 verbindet, nach Satz 5.4 sogar ein Weg, aus $v_1 \, R \, v_3$ folgt die Transitivität. Sind zwei oder alle drei der Knoten v_1, v_2, v_3 gleich, so ist R nach Definition 5.7 trivialerweise transitiv.

Damit ist R eine Äquivalenzrelation. Man kann also die Menge V der Knoten eines Graphen (V,E,f) eindeutig so in paarweise elementfremde Klassen V_i einteilen, daß zwei Elemente $v_i, v_j \in V$ dann und nur dann derselben Klasse angehören, wenn gilt: $v_i \, R \, v_j$.
Es gilt also eine Darstellung der Form

$$(5.1) \qquad V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i \, ,$$

dabei sind die Mengen $V_1, \ldots, V_r$ paarweise disjunkt.

DEFINITION 5.8:
Jede Äquivalenzklasse von Knoten bildet zusammen mit denjenigen Kanten aus E, welche mit diesen Knoten inzident sind, eine Zusammenhangskomponente von G.

SATZ 5.6:
Jeder endliche Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn alle Knoten derselben Äquvalenzklasse angehören.

Zum Beweis siehe [9] Kapitel I, §4, Satz 20, Seite 14.

Damit ergeben sich folgende Beziehungen zu den früher behandelten Problemen.

Gegeben sei ein endliches Spiel $(X,Y;a,b)$ mit $X := \{x_1,\ldots,x_m\}$ und $Y := \{y_1,\ldots,y_n\}$, und $(P,Q;a,b)$, die gemischte Erweiterung von $(X,Y;a,b)$, ist ein vollständig reduziertes Konkurrenz-Spiel, ferner sei $m > 1$, $n > 1$. Dann ist die Menge Q wie in (1.2), ferner $Q_a(x_i)$ für alle $i = 1,\ldots,m$ wie in (2.1) definiert.
Es sollen nun Ergebnisse, die früher hergeleitet wurden, zusammengefaßt werden, in den Klammern ist jeweils angegeben, wo die Ergebnisse bewiesen wurden:

(5.2)
- Die Mengen Q, $Q_a(x_1),\ldots,Q_a(x_m)$ sind konvexe Polyeder (nach Satz 2.6 (Seite 37)) ;
- $Q = \bigcup_{i=1}^{m} Q_a(x_i)$ (nach Korollar 2.5.2 c)) ;
- $\dim Q = \dim Q_a(x_i) = n-1 \geqslant 1$ für alle $i=1,\ldots,m$ (nach Satz 4.14)
- $\dim (Q_a(x_i) \cap Q_a(x_j)) \neq n-1$ für $i \neq j$ und $i,j = 1,\ldots,m$ (nach Korollar 4.14.2)

Dann läßt sich den Bedingungen (5.2) ein Graph (V,E,f) mit $V = \{v_1,\ldots,v_m\}$ zuordnen; die Knoten $v_1,\ldots,v_m$ entsprechen den Mengen $Q_a(x_1),\ldots,Q_a(x_m)$, ferner sind zwei voneinander verschiedene Knoten $v_i, v_j \in V$ genau dann durch eine Kante $e \in E$ verbunden, wenn gilt: $\dim (Q_a(x_i) \cap Q_a(x_j)) = n-2$. Dieser den Bedingungen (5.2) zugeordnete Graph soll im folgenden mit $G_c = (V,E,f)$ bezeichnet werden.

Damit kann man die folgenden Aussage beweisen:

SATZ 5.7:

G_c ist zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen, der Graph G_c zerfalle in l Zusammenhangskomponenten $Z_1,\ldots,Z_l$ mit $l > 1$. Ferner sei $V_1 := \{v_1,..,v_r\}$ die Menge aller Knoten von Z_1 und $E_1 := \{e_1,\ldots,e_s\}$ die Menge aller Kanten von Z_1. Ist $f_1 := f/E_1$ die Restriktion der Abbildung f auf E_1, so ist $Z_1 = (V_1,E_1,f_1)$ ein zusammenhängender Graph. Zu jedem $v_j \notin V_1$ existiert ein $\lambda = 2,\ldots,l$, so daß v_j der Zusammenhangskomponente Z_λ angehört.

Man überträgt diese Resultate auf die Bedingungen (5.2), indem man die Knoten $v_1,\ldots,v_m$ mit den Mengen $Q_a(x_1),\ldots,$ $Q_a(x_m)$ identifiziert, ferner die Menge V_1 mit der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{r} Q_a(x_i) =: C_1$, sowie die Menge $V-V_1$ mit $\bigcup_{i=r+1}^{m} Q_a(x_i) =: C_2$. Dann erfüllen die Mengen Q, C_1, C_2 die Voraussetzungen von Satz 5.3, es gilt damit:

$$\dim (C_1 \cap C_2) \geq n-2 \quad .$$

Weiter folgt nach (5.2):

$$\dim (C_1 \cap C_2) = \dim \Big(\bigcup_{i=1}^{r} Q_a(x_i) \cap \bigcup_{j=r+1}^{m} Q_a(x_j) \Big)$$

$$= \dim \Big(\bigcup_{i,j} (Q_a(x_i) \cap Q_a(x_j)) \Big)$$

$$\leq n-2 \ ,$$

damit ergibt sich:

$$\dim (C_1 \cap C_2) = n-2 .$$

Es existieren also Indizes i und j mit $i \neq j$ und

$$\dim (Q_a(x_i) \cap Q_a(x_j)) = n-2 .$$

Dann werden die Knoten $v_i = Q_a(x_i)$ und $v_j = Q_a(x_j)$ durch eine Kante verbunden, andererseits gilt $v_i \in V_1$ und $v_j \in V-V_1$. Dies ist ein Widerspruch und G_c ist zusammenhängend.

Die Aussage der Satzes 5.7 besteht darin, daß jeweils zwei verschiedene Knoten von G_c durch mindestens einen Weg verbunden sind. Daraus ergibt sich für das in (5.2) beschriebene Problem:
Beginnt man bei einem festen $Q_a(x_i)$, so kann man eine Folge von Polyedern $Q_a(x_{i_1}),\ldots,Q_a(x_{i_k})$ durchlaufen, dabei ist der Übergang zwischen zwei konvexen Polyedern jeweils dann und nur dann gestattet, wenn der Durchschnitt genau (n-2) -dimensional ist. Der Satz 5.7 sagt aus, daß man auf diese Weise von einem beliebigen $Q_a(x_i)$ aus jedes $Q_a(x_j)$ mit $i \neq j$ erreichen kann; im folgenden wird die Sprechweise aus der Graphentheorie übernommen:
Es führt ein <u>Weg</u> von $Q_a(x_i)$ nach $Q_a(x_j)$, entsprechend werden auch die übrigen eingeführten, graphentheoretischen Begriffe übertragen.

Sind die Mengen P, $P_b(y_1),\ldots,P_b(y_n)$ wie in (1.1) bzw. (2.3) definiert und ersetzt man die Bedingungen (5.2) durch:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Die Mengen } P,\ P_b(y_1),\ldots,P_b(y_n) \text{ sind konvexe Polyeder (nach Satz 2.6)} \\
P = \bigcup_{j=1}^{n} P_b(y_j) \quad \text{(nach Korollar 2.5.2 c))} \\
\dim P = \dim P_b(y_j) = n-1 \geq 1 \text{ für alle } j=1,\ldots,n \\
\qquad\qquad \text{(nach Satz 4.14)} \\
\dim \left(P_b(y_i) \cap P_b(y_j) \right) \neq n-1 \text{ für } i \neq j \\
\qquad \text{und } i,j = 1,\ldots,n \text{ (nach Korollar 4.14.2)}
\end{array}
\right.
\tag{5.1}
$$

dann läßt sich ganz entsprechend ein Graph zuordnen und man erhält analoge Ergebnisse.

Mit Hilfe des Ergebnisses von Satz 5.7 wird die Behandlung des vollständig reduzierten Konkurrenz-Spiels $(P,Q;a,b)$ weitergeführt.
Sei α_i die i-te Zeile der Auszahlungsmatrix A, α^j die j-te Spalte, bzw. β_i und β^j die entsprechende Zeile oder Spalte von B .

Satz 5.8:
Sei $(P,Q;a,b)$ ein vollständig reduziertes Konkurrenz-Spiel und $Q_a(x_1),Q_a(x_2)$ sowie $P_b(y_1)$, $P_b(y_2)$ seien benachbart. Ist das Teilspiel $(\{x_1,x_2\},\{y_1,y_2\};a,b)$ nicht strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel, so gelten die

Beziehungen:

(5.4) $a(x_1,y_1) - a(x_1,y_2) = a(x_2,y_1) - a(x_2,y_2)$

(5.5) $b(x_1,y_1) - b(x_1,y_2) = b(x_2,y_1) - b(x_2,y_2)$

Beweis:

$Q_a(x_1)$ und $Q_a(x_2)$ sind benachbart, dann ist der Durchschnitt $Q_a(x_1) \cap Q_a(x_2)$ (n-2) -dimensional und Teilmenge der Hyperebene $\{\sigma\eta \in Q: (\sigma_1-\sigma_2)\sigma\eta = 0\}$ in Q; ebenso gilt dim ($Q_b(x_1) \cap Q_b(x_2)$) = n-2 und die Menge $Q_b(x_1) \cap Q_b(x_2)$ ist Teilmenge der Hyperebene $\{\sigma\eta \in Q: (\tau_1-\tau_2)\sigma\eta = 0\}$ in Q.

Nach Satz 4.14 stimmen diese beiden Hyperebenen überein, es existiert also eine reelle Zahl $s \neq 0$ mit:

(5.6) $s(\sigma_1 - \sigma_2) + \tau_1 - \tau_2 = \nu$

oder komponentenweise

(5.7) $s(a_{1j} - a_{2j}) + b_{1j} - b_{2j} = 0$
für alle j=1,...,n.

Dann gilt sogar $s > 0$.

Denn wegen dim $Q_a(x_1)$ = n-1 (vgl. dazu Satz 4.14) existiert ein $\sigma\eta \in Q$ mit $a(x_1,\sigma\eta) > a(x_i,\sigma\eta)$ für alle $i \neq 1$, oder vektoriell geschrieben

$$\sigma_1\sigma\eta > \sigma_i\sigma\eta \quad \text{für } i=2,\ldots,n,$$

damit nach Korollar 4.14.1 auch

$$\tau_1\sigma\eta < \tau_i\sigma\eta \quad \text{für } i=2,\ldots,n.$$

Aus $s \leq 0$ würde mit

$$s\,\sigma_1\sigma\eta + \tau_1\sigma\eta < s\,\sigma_i\sigma\eta + \tau_i\sigma\eta \text{ für } i=2,\ldots,n$$

ein Widerspruch zu (5.6) folgen.

Ebenso folgert man aus der Voraussetzung, wonach auch die Mengen $P_b(y_1)$ und $P_b(y_2)$ benachbart sind, daß ein reelles $t>0$ existiert mit

$$(5.8) \quad t(\alpha^1 - \alpha^2) + \beta^1 - \beta^2 = \nu$$

oder komponentenweise

$$(5.9) \quad t(a_{i1} - a_{i2}) + b_{i1} - b_{i2} = 0 \qquad \text{für } i=1,\dots,m .$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(5.10) \quad s(a_{11} - a_{21}) + b_{11} - b_{21} = 0$$
$$(5.11) \quad s(a_{12} - a_{22}) + b_{12} - b_{22} = 0$$
$$(5.12) \quad t(a_{11} - a_{12}) + b_{11} - b_{12} = 0$$
$$(5.13) \quad t(a_{21} - a_{22}) + b_{21} - b_{22} = 0$$

Subtrahiert man die Summe von (5.11) und (5.12) von der Summe von (5.10) und (5.13), so erhält man:

$$s(a_{11}-a_{21}-a_{12}+a_{22}) - t(a_{11}-a_{21}-a_{12}+a_{22}) = 0 .$$

1. Fall:

Ist $s=t$, so gilt nach (5.10), (5.11) und (5.12):

$$sa_{11} + b_{11} = sa_{21} + b_{21} = sa_{12} + b_{12} = sa_{22} + b_{22} =: c .$$

Dann ist $(\{x_1,x_2\},\{y_1,y_2\};a,b)$ nach Definition 1.1 strategisch äquivalent zu dem Nullsummen-Spiel $(\{x_1,x_2\},\{y_1,y_2\};a',-a')$, wobei gilt:

$$a'(x,y) = sa(x,y) = c - b(x,y)$$
$$\text{für alle } x\in\{x_1,x_2\},\ y\in\{y_1,y_2\}.$$

Damit hat man einen Widerspruch zur Voraussetzung, daraus folgt der

2. Fall:

$s \neq t$: Daraus ergibt sich direkt (5.4).

Ebenso folgert man, indem man (5.10) und (5.11) mit $\frac{1}{s}$, sowie (5.12) und (5.13) mit $\frac{1}{t}$ durchmultipliziert, aus $\frac{1}{s} \neq \frac{1}{t}$ die Gleichung (5.5) .

KOROLLAR 5.8.1:

Sei (P,Q;a,b) ein vollständig reduziertes Konkurrenz-Spiel und Spieler II habe höchstens zwei reine Strategien. Dann ist (P,Q;a,b) strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Beweis:

1) Nach Voraussetzung und Satz 5.7 sind die Mengen $P_b(y_1)$ und $P_b(y_2)$ benachbart. Zu je zwei Mengen $Q_a(x_i)$ und $Q_a(x_j)$ mit $i \neq j$ läßt sich gleichfalls nach Satz 5.7 ein Weg finden, der die beiden Mengen verbindet. Man betrachtet den Weg von $Q_a(x_1)$ nach $Q_a(x_k)$ mit $m \geq k > 1$, der o.B.d.A. die Mengen $Q_a(x_l)$ für $l=1,\ldots,k$ als Knoten enthält, wobei $Q_a(x_l)$ und $Q_a(x_{l+1})$ für $l = 1,\ldots,k-1$ benachbart sind.

2) Angenommen, es existiert ein $l \in \{1,\ldots,k-1\}$, so daß das Spiel $(\{x_l,x_{l+1}\},Y ; a,b)$ mit $Y := \{y_1,y_2\}$ nicht strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel ist, so gilt entsprechend zu (5.4) bzw. (5.5):

(5.14) $a_{l1} - a_{l2} = a_{l+1,1} - a_{l+1,2}$

(5.15) $b_{l1} - b_{l2} = b_{l+1,1} - b_{l+1,2}$.

Ist o.B.d.A. $a_{l1} \gtrdot a_{l+1,1}$, so auch $a_{l2} \gtrdot a_{l+1,2}$ nach (5.14), daraus folgt:

$$x_l \underset{(Y)}{\gtrsim} x_{l+1} \quad ,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, damit gilt für alle $l = 1,\ldots,k-1$:

Das Spiel $(\{x_l, x_{l+1}\}, Y ; a,b)$ ist strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

3) Also existiert für jedes $l \in \{1,\ldots,k-1\}$ ein $s_l > 0$ mit

(5.16) $$s_l a_{l1} + b_{l1} = s_l a_{l2} + b_{l2} = s_l a_{l+1,1} + b_{l+1,1} = s_l a_{l+1,2} + b_{l+1,2} =: c_l \quad .$$

Entsprechend zum Beweis von Satz 5.8 sind nach Voraussetzung auch (5.8) sowie (5.9) erfüllt. Damit gelangt man für jedes $l \in \{1,\ldots,k-1\}$ zu einer Fallunterscheidung, wie sie im Beweis von Satz 5.8 auftrat.

1. Fall:

Ist $t = s_l$ für alle $l \in \{1,\ldots,k-1\}$, so ist das Spiel $(\{x_1,..,x_k\}, Y ; a,b)$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

2. Fall:

Ist $t \neq s_l$ für ein $l \in \{1,\ldots,k-1\}$, so erhält man analog zu (5.4) und (5.5) die Beziehungen (5.14) und (5.15), daraus folgert man wie in 2) einen Widerspruch.

Also kann nach Voraussetzung nur Fall 1 auftreten, und für alle k = 2,...,m erhält man ein entsprechendes Ergebnis.

4) Aus 3) folgt:
Für alle k = 2,...,m ist das Spiel $(\{x_1,x_k\},Y\ ;\ a,b\ )$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel. Dann gilt eine Darstellung der Form (5.16) für l = 1,...,m-1 und alle Schritte von 3) werden für l = 1,...,m-1 durchführbar. Daraus folgt durch eine Fallunterscheidung wie in 3) , daß das Spiel $(\{x_1,...,x_m\},Y\ ;\ a,b\ ) =$ $(\ X,Y;a,b\ )$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel ist.
Daraus folgt die Behauptung.

Ganz analog verläuft der Beweis für $X = \{x_1,x_2\}$ und $Y = \{y_1,...,y_n\}$.

Besitzt also einer der beiden Spieler höchstens zwei reine Strategien, so ist das vollständig reduzierte Konkurrenz-Spiel (P,Q;a,b) strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

SATZ 5.9:
Sei $\overline{\sigma}$ = (P,Q;a,b) ein vollständig reduziertes Konkurrenz-Spiel. Dann ist $\overline{\sigma}$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe von vollständiger Induktion. Das Spiel $\bar{\sigma}$ ist charakterisiert durch die beiden Auszahlungsmatrizen A und B, die jeweils m Zeilen und n Spalten besitzen.
Dann ist die Induktionsverankerung für m = 2 nach Korollar 5.8.1 bewiesen.

Man nimmt an, die Behauptung gilt, falls A und B jeweils m-1 (> 2) Zeilen besitzen. Man betrachtet $\sigma = (X,Y;a,b)$ mit $X = \{x_1,..,x_m\}$ und $Y = \{y_1,...,y_n\}$ und $\bar{\sigma}$ sei die gemischte Erweiterung von σ. Dann ist nach Induktionsannahme jedes Teilspiel $(P(X'),Q;a,b)$, das Konkurrenz-Spiel und nicht reduzierbar ist, in dem ferner X' höchstens m-1 Elemente enthält, strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.
Nach Satz 5.7 existiert zujedem $i \in \{1,...,n\}$ ein $j \neq i$, so daß $Q_a(x_i)$ und $Q_a(x_j)$ benachbart sind, sowie zu jedem $k \in \{1,...,n\}$ ein $l \neq k$, so daß $P_b(y_k)$ und $P_b(y_l)$ benachbart sind. Damit gibt es analog zum Beweis von Satz 5.8 ein $s_{ij} > 0$, so daß entsprechend zu (5.7) gilt:

$$(5.17) \quad s_{ij}a_{i\nu} + b_{i\nu} = s_{ij}a_{j\nu} + b_{j\nu} =: c_{ij}, \quad \nu = 1,...,n.$$

Entsprechend gibt es analog zu (5.9) ein $t_{kl} > 0$, so daß gilt:

$$(5.18) \quad t_{kl}a_{\mu k} + b_{\mu k} = t_{kl}a_{\mu l} + b_{\mu l} =: c'_{kl}, \quad \mu = 1,...,m.$$

1) Es existiert nach Satz 5.7 o.B.d.A. ein $k \neq i$, so daß $Q_a(x_j)$ und $Q_a(x_k)$ benachbart sind; dann gilt analog zu (5.17):

$$(5.19) \quad s_{jk}a_{j\nu} + b_{j\nu} = s_{jk}a_{k\nu} + b_{k\nu} =: c_{jk} \text{ , für } \nu = 1,\ldots,n \text{ .}$$

Aus (5.17) und (5.19) folgt:

$$(s_{ij}-s_{jk})\, a_{j\nu} = c_{ij} - c_{jk} \quad \text{für alle } \nu$$

und damit, falls $s_{ij} \neq s_{jk}$, gilt:

$$a_{j\nu} = \text{konstant, für alle } \nu = 1,\ldots,n \text{ ,}$$

sowie nach (5.17)

$$b_{j\nu} = \text{konstant für alle } \nu = 1,\ldots,n \text{ .}$$

2) Ebenso existiert nach Satz 5.7 o.B.d.A. ein $j \neq l$, so daß $P_b(y_j)$ und $P_b(y_k)$ benachbart sind.
Aus $t_{jk} \neq t_{kl}$ folgert man entsprechend zu 1) :

$a_{\mu k}$ = konstant und $b_{\mu k}$ = konstant für alle $\mu = 1,..,m$.

Damit ergeben sich die folgenden Fallunterscheidungen :

1. Fall:

Tritt 1) und 2) auf, so ist das Spiel $(X-\{x_j\}, Y; a,b)$ weder reduzierbar noch quasireduzierbar, andernfalls wäre auch (X,Y;a,b) reduzierbar bzw. quasireduzierbar im Widerspruch zur Voraussetzung.
Ferner ist $\Gamma' = (X-\{x_j\}, Y ; a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel:
Wegen $X-\{x_j\} \subset X$ ist Γ' mit $\Gamma = (X,Y;a,b)$ Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers II.

Nimmt man an, es existiert ein $\nu_0 \in \{1,\dots,n\}$ mit $\nu_0 \neq k$, so daß $\max\limits_{x\in X} a(x,y_{\nu_0}) = a(x_j,y_{\nu_0})$, also $\min\limits_{x\in X} b(x,y_{\nu_0}) = b(x_j,y_{\nu_0})$ gilt, dann erhält man:

$$b_{j\nu_0} \geq b_{\mu\nu_0} \quad \text{für alle } \mu=1,\dots,n$$

und $b_{jk} = b_{\mu k}$ für alle $\mu=1,\dots,n$ (wegen 2)).

Wegen $b_{j\nu_0} = b_{jk}$ nach 1) wäre die Strategie y_{ν_0} bzgl. X dominiert bzw. quasidominiert im Widerspruch zur Voraussetzung. Die im Teilspiel $\Gamma' = (X-\{x_j\},Y;a,b)$ gestrichene Strategie x_j kann also für Spieler I nur maximal sein gegen y_k und damit ist Γ' wegen

$$a(x_\mu,y_k) = \text{konst. und } b(x_\mu,y_k) = \text{konst. für alle } \mu$$

(nach 2)) auch Konkurrenz-Spiel bzgl. des Spielers I. Im 1. Fall erhält man also Γ' als nicht reduzierbares bzw. quasireduzierbares Konkurrenz-Spiel. Da Spieler I in $\overline{\Gamma}'$ nur n-1 reine Strategien besitzt, ist $\overline{\Gamma}'$ strategisch äquivalent zu einen Nullsummen-Spiel nach Induktionsannahme und damit auch $\overline{\Gamma} = (P,Q;a,b)$, da 1) und 2) erfüllt ist.

2. Fall:

Für beliebiges $k\neq 1$, wobei $P_b(y_k)$ und $P_b(y_1)$ benachbart sind, gilt in (5.18): $t_{k1} =: t$.

Nach Satz 5.7 existiert o.B.d.A. ein $j\neq 1$, so daß $P_b(y_j)$ und $P_b(y_k)$ benachbart sind. Analog zu (5.8) gilt wegen

$$t(a^j-a^k) + b^j-b^k = v \quad \text{und} \quad t(a^k-a^1) + b^k-b^1 = v$$

nach Addition auch

(5.20) $\quad t(a^j-a^1) + b^j-b^1 = v,$

obgleich $P_b(y_j)$ und $P_b(y_1)$ nicht notwendig benachbart sind.

Man nimmt an, es sei $s_{ij} \neq t$ (vgl. (5.17)):
Dann erhält man analog zu Fall 2 im Beweis von Satz 5.8 für je zwei benachbarte $P_b(y_k)$ und $P_b(y_l)$ zu (5.4) und (5.5) entsprechende Bedingungen:

$$a_{ik} - a_{il} = a_{jk} - a_{jl} \,, \quad b_{ik} - b_{il} = b_{jk} - b_{jl} \,.$$

O.B.d.A. sei $a_{ik} \gtrdot a_{jk}$, dann gilt auch $a_{il} \gtrdot a_{jl}$.
Wegen Satz 5.7, nach dem je zwei Mengen $P_b(y)$ durch einen Weg verbunden sind, erhält man mit $a_{ik} \gtrdot a_{jk}$ sukzessive $a_{i\nu} \gtrdot a_{j\nu}$ für alle $\nu = 1,\ldots,n$. Damit gilt:

$$x_i \underset{(Y)}{\gtrsim} x_j \,, \quad \text{im Widerspruch zur Voraussetzung.}$$

Falls also $Q_a(x_i)$ und $Q_a(y_j)$ benachbart sind, existiert ein $s_{ij} = t > 0$, so daß analog zu (5.6) gilt:

(5.21) $\quad t(\alpha_i - \alpha_j) + \beta_i - \beta_j = \nu$

und daraus entsprechend zu (5.20) auch

(5.22) $\quad t(\alpha_i - \alpha_k) + \beta_i - \beta_k = \nu \,,$

wobei α_i und α_k verschiedene Zeilen von A, β_i und β_k die entsprechenden Zeilen von B sind.
Schreibt man (5.20) und (5.22) komponentenweise, so folgt mit

$$ta_{ij} + b_{ij} = ta_{kl} + b_{kl} =: c \text{ für } \begin{matrix} i,k=1,\ldots,m \\ j,l=1,\ldots,n \end{matrix}$$

direkt die Behauptung von Satz 5.9 .

Der Fall, daß $s_{ij} =: s$ für alle $i,j=1,\ldots,m$ gilt, verläuft analog zu Fall 2, damit ist Satz 5.9 vollständig bewiesen.

SATZ 5.10:

Sei $\bar{\Gamma}_r = (P(X_r), Q(Y_r); a, b)$ ein reduziertes Konkurrenz-Spiel (vgl. Definition 1.8, Seite 23) und $\bar{\Gamma}_v = (P(X_v), Q(Y_v); a, b)$ das vollständig reduzierte Teilspiel von $\bar{\Gamma}_r$ (vgl. Definition 4.5, Seite 89). Dann ist $\bar{\Gamma}_r$ strategisch äquivalent zu einen Nullsummen-Spiel.

Beweis:

Nach Satz 5.9 ist $\bar{\Gamma}_v$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel. Sei o.B.d.A. $X_r \supsetneq X_v$ und sei x_s die letzte Strategie, die bei Quasireduktion von $\bar{\Gamma}_r$ auf $\bar{\Gamma}_v$ eliminiert wird.

Dann existiert nach Satz 4.11 ein $\xi' \in P(X_v)$ mit: $\xi' \underset{(Y_v)}{\sim} x_s$.

Andererseits existiert nach Satz 5.9 ein $t > 0$ mit:

$$ta(\xi', \eta) + b(\xi', \eta) = c \quad \text{für alle} \quad \eta \in Q(Y_v) .$$

Dann gilt nach Definition 4.3 auch

$$ta(x_s, \eta) + b(x_s, \eta) = c \quad \text{für alle} \quad \eta \in Q(Y_v),$$

also ist $(P(X_v \cup \{x_s\}), Q(Y_v); a, b)$ strategisch äquivalent zu einen Nullsummen-Spiel.

Wendet man diese Überlegung rückwärts auf jeden Reduktionsschritt an, so folgt hieraus die Behauptung.

Ist also $(P, Q; a, b)$ ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, so ist das im Sinne von Definition 1.8 reduzierte Teilspiel $(P(x_r), Q(Y_r); a, b)$ mit $X_r \subset X$ und $Y_r \subset Y$ strategisch äquivalent zu einen Nullsummen-Spiel.

Daß ein reduzierbares Konkurrenz-Spiel nicht notwendig strategisch äquivalent ist zu einem Nullsummen-Spiel ist, wird durch Beispiel 6 (Seite 73) bestätigt:

In diesem Spiel gilt:

$$x_1 \underset{(Y)}{\triangleright} x_2 \quad , \text{ sowie } \quad y_2 \underset{(X)}{\triangleright} y_1 \quad .$$

Also ist das reduzierte Teilspiel gegeben durch $(\{x_1\}, \{y_2\}; a,b)$, dieses Spiel ist trivialerweise strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Ferner gilt mit Satz 5.10 noch

KOROLLAR 5.10.1:

Jedes nicht reduzierbare Teilspiel $(P',Q';a,b)$ eines zweiseitigen Konkurrenz-Spiels (P,Q,a,b), das das Spiel $(P(X_r), Q(Y_r) ; a,b)$ als Teilspiel enthält, ist strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Beweis:

Nach Korollar 4.9.1 ist $\bar{\sigma}' = (P',Q';a,b)$ Konkurrenz-Spiel, ferner stimmt $\bar{\sigma}'$ mit seinem reduzierten Teilspiel überein, dann folgt die Behauptung aus Satz 5.10 .

Diese Aussage bedeutet eine Verschärfung von Satz 5.10 .

Das sei erläutert an

Beispiel 10:

Das Spiel $\bar{\sigma}_{10} = (P,Q;a,b)$ sei gegeben durch die Auszahlungsmatrizen, wobei $1 > \varepsilon > 0$ ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Dann ist $\bar{\sigma}_{10}$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Es gilt:

$$x_2 \underset{(Y)}{\triangleright} x_3 \quad \text{und} \quad y_1 \underset{\{x_1,x_2\}}{\triangleright} y_3 .$$

Satz 5.10 sagt aus, daß das reduzierte Teilspiel $(\{x_1,x_2\},\{y_1,y_2\}; a,b)$ strategisch äqivalent ist zu einem Nullsummen-Spiel.

Streicht man in den zu $\overline{\sigma}_{10}$ gehörigen Auszahlungsmatrizen A und B jeweils die letzte Spalte, so ist das dadurch entstehende Teilspiel $(X,\{y_1,y_2\};a,b)$ von $\overline{\sigma}_{10}$ nicht reduzierbar, es enthält das reduzierte Teilspiel von $\overline{\sigma}_{10}$ und ist damit nach Korollar 5.10.1 strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

6.) Zusammenhang wesentlicher Teilspiele von Konkurrenz-Spielen mit Nullsummen-Spielen.

Wie in Definition 1.8 und 1.10 wird das reduzierte Teilspiel eines Konkurrenz-Spiels $(P,Q;a,b)$ mit $(P(X_r),Q(Y_r);a,b)$, das wesentliche Teilspiel von $(P,Q;a,b)$ mit $(P(X_w),Q(Y_w);a,b)$ bezeichnet.
Dann gilt $X_r \subset X$, $X_w \subset X$ und $Y_r \subset Y$, $Y_w \subset Y$, jedoch ist nicht notwendig $X_w \subset X_r$ bzw. $Y_w \subset Y_r$ erfüllt, denn nach Beispiel 2 (Seite 23) gehen bei der Reduktion oft Gleichgewichtsstrategien verloren. Ebenso gilt auch nicht notwendig $X_r \subset X_w$ bzw. $Y_r \subset Y_w$.

Denn es gibt sogar Nullsummen-Spiele, die nur einen Gleichgewichtspunkt in reinen Strategien besitzen und dennoch nicht reduzierbar sind.

Beispiel 9:
$\bar{\sigma}_9 = (P,Q;a,-a)$ sei gegeben durch die Auszahlungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dann existiert genau ein Gleichgewichtspunkt (x_1,y_1) mit $a(x_1,y_1) = 2$ und $\bar{\sigma}_9$ ist nicht reduzierbar.
Also gilt hier $X_r = X$, $X_w = \{x_1\}$,
$Y_r = Y$, $Y_w = \{y_1\}$.

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß mit $(P,Q;a,b)$ auch $\bar{\sigma}_w := (P(X_w),Q(Y_w);a,b)$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel ist. Dies ist direkt klar für den Fall, da $X_w \subset X_r$

und $Y_W \subset Y_r$ gilt. Denn nach Satz 5.10 ist das Teilspiel $\bar{\Gamma}_r := (P(X_r), Q(Y_r); a, b)$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel und damit auch jedes Teilspiel von $\bar{\Gamma}_r$. Schwieriger sind die Fälle $X_W \not\subset X_r$ bzw. $Y_W \not\subset Y_r$ zu behandeln. Dazu sind einige Hilfsbetrachtungen notwendig.

Sei $\bar{\Gamma}_o := (P, Q; a, b)$ ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, $\bar{\Gamma}_r$ das reduzierte und $\bar{\Gamma}_W$ das wesentliche Teilspiel von $\bar{\Gamma}_o$. Im folgenden interessiert ausschließlich das Spiel $\bar{\Gamma} := (P(X_r \cup X_W), Q(Y_r \cup Y_W); a, b)$. Dann ist $\bar{\Gamma}$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel nach Korollar 4.9.1 und $\bar{\Gamma}_R := (P(X_R), Q(Y_R); a, b)$ das reduzierte, $\bar{\Gamma}_W := (P(X_W), Q(Y_W); a, b)$ das wesentliche Teilspiel von $\bar{\Gamma}$. Es gilt $X_R \supset X_r$ und $Y_R \supset Y_r$, andernfalls wäre $\bar{\Gamma}_r$ reduzierbar. Ebenso gilt $X_W \supset X_W$ und $Y_W \supset Y_W$, denn jede Gleichgewichtsstrategie in $\bar{\Gamma}_o$ ist auch Gleichgewichtsstrategie in $\bar{\Gamma}$. Nach Korollar 5.10.1 ist $\bar{\Gamma}_R$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Ferner sei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ die Menge aller Strategien, die zu X_W, aber nicht zu Y_R, und $\{y_1, \ldots, y_l\}$ die Menge aller Strategien, die zu Y_W, aber nicht zu Y_R, gehören. Dann ist

$$(6.0) \qquad \begin{aligned} X_R \cup X_W - \{x_1, \ldots, x_k\} &= X_R \\ Y_R \cup Y_W - \{y_1, \ldots, y_l\} &= Y_R \end{aligned}$$

Es sei o.B.d.A. angenommen, die Strategien $x_1, \ldots, x_k$ werden in der Reihenfolge ihrer Indizierung bei Reduktion von $X_r \cup X_W$ auf X_R gestrichen, entsprechend die Strategien $y_1, \ldots, y_l$.

Die nachfolgenden Aussagen der Sätze 6.1 - 6.3 werden auf den Spieler I bezogen, analoge Ergebnisse erhält man auch für Spieler II.

SATZ 6.1 :

Zu jedem x_i $(i = 1,..,k)$ existiert ein $\varrho_i \in P(X_R)$

(6.1) $\quad a(\varrho_i,y) \geq a(x_i,y) \quad$ für alle $y \in Y_R$

$\quad\quad a(\varrho_i,y) = a(x_i,y) \quad$ für alle $y \in Y_R \cap Y_W$

Beweis:

Nach Definition von $\bar{\sigma}_R$ existiert zu jedem x_i $(i = 1,...k)$ ein $\varrho_i \in P(X_R)$, so daß gilt:

(6.2) $\quad a(\varrho_i,y) \geq a(x_i,y)$ für alle $y \in Y_R$

Angenommen, es gibt für ein $i \in \{1,..,k\}$ ein $y \in Y_R \cap Y_W$ mit

(6.3) $\quad a(\varrho_i,y) > a(x_i,y)$

und sei $\tilde{q} := (\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n)$ eine Gleichgewichtsstrategie in $\bar{\sigma}$ mit

$$\tilde{q}_j \begin{cases} > 0 & \text{für } y_j \in Y_R \cap Y_W \\ = 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt nach Satz 4.7 mit (6.2) und (6.3) auch

$$a(\varrho_i,\tilde{q}) > a(x_1,\tilde{q}) = a(\varrho^*,\tilde{q}),$$

wobei ϱ^* eine beliebige Gleichgewichtsstrategie des Spielers I ist. Dies bedeutet einen Widerspruch zu Definition 1.2, also gilt

(6.4) $\quad a(\varrho_i,y) = a(x_i,y)$ für alle $y \in Y_R \cap Y_W$, $i = 1,...,k$.

Im folgenden sei Y_V die Menge der wesentlichen Strategien von Spieler II in $\bar{\sigma}$ bzw. $\bar{\sigma}_R$. Also gilt $Y_V = Y_W$ bzw. $Y_V = Y_R \cap Y_W$. Ferner sei $\bar{\sigma}$ "echt" reduzierbar, d.h. o.B.d.A. gilt $X_R \subsetneq X_r \cup X_w$.

Dann formuliert man

SATZ 6.2:

Zu jedem x_i $(i=1,\ldots,k)$ existiere ein $\varrho_{\delta i} \in P(X_R \cup X_W - \{x_1,..,x_i\})$ mit $\varrho_{\delta i} := (p_{i1},\ldots,p_{im})$, so daß gilt:

$$(6.5)\qquad \begin{aligned} a(\varrho_{\delta i},y) &\geq a(x_i,y) \quad \text{für alle } y \in Y_R \\ a(\varrho_{\delta i},y) &= a(x_i,y) \quad \text{für alle } y \in Y_V \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

a) Für alle $i=1,\ldots,k$ existiert ein $\varrho'_{\delta i} \in P(X_R)$, so daß (6.5) und $\varrho'_{\delta k} = \varrho_{\delta k}$ gilt.

b) Jedes $\varrho'_{\delta i} \in P(X_R)$, welches (6.5) erfüllt, ist aus $P(X_R \cap X_W)$.

Beweis:

a) Setzt man $\varrho'_{\delta k} = \varrho_{\delta k}$, so ist die Behauptung für $i = k$ in den Voraussetzungen enthalten. Man nimmt an, die Behauptung sei für $i=j+1,..,k$ gezeigt. Für beliebiges $i=1,\ldots,k$ gilt nach Voraussetzung: $p_{i\mu} = 0$ für $\mu \leq i$.

Daraus folgt nach Induktionsannahme für alle $y \in Y_R \cup Y_V$:

$$a(x_j,y) \leq a(\varrho_{\delta j},y) = \sum_{i=j+1}^{m} p_{ji}\, a(x_i,y)$$

$$\leq \sum_{i=j+1}^{k} p_{ji}\, a(\varrho'_{\delta i},y) + \sum_{i=k+1}^{m} p_{ji}\, a(x_i,y) =: a(\varrho'_{\delta j},y)$$

und $\varrho'_{\delta j} := (p'_{j1},\ldots,p'_{jm})$ mit $p'_{j\mu} := \begin{cases} 0 & \mu = 1,..,k \\ p_{j\mu} + \sum_{i=j+1}^{k} p_{ji}\, p'_{i\mu} & \text{sonst} \end{cases}$

ist wegen $\sum_{\mu=1}^{m} p'_{j\mu} = \sum_{\mu=k+1}^{m} \left(p_{j\mu} + \sum_{i=j+1}^{k} p_{ji}\, p'_{i\mu} \right) = 1$

und $p'_{j\mu} \geq 0$ für alle μ eine Strategie und nach Definition wegen (6.0) aus $P(X_R)$. Da nach (6.5) und Induktionsannahme für alle $y \in Y_V$ in obiger Abschätzung das Gleichheitszeichen steht, ist die Behauptung a) gezeigt.

b) Sei $\bar{\varphi} := (\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_m)$ eine Gleichgewichtsstrategie

mit $\bar{p}_i \begin{cases} > 0 & x_i \in X_W \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $\varphi_i^! := (p_{i1}^!,..,p_{im}^!)$ aus $P(X_R)$

für alle $i=1,\ldots,k$. Dann gilt für alle $y \in Y_R \cup Y_V$:

$$(6.6)\quad a(\bar{\varphi},y) = \sum_{i=1}^{m} \bar{p}_i a(x_i,y) \leq \sum_{i=1}^{k} \bar{p}_i a(\varphi_i^!,y) + \sum_{i=k+1}^{m} \bar{p}_i a(x_i,y)$$

$$=: a(\tilde{\varphi},y)$$

mit $\tilde{\varphi} := (\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_m)$ und $\tilde{p}_\mu := \begin{cases} 0 & \mu = 1,..,k \\ \bar{p}_\mu + \sum_{i=1}^{k} \bar{p}_i p_{i\mu}^! & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann ist $\tilde{\varphi}$ wegen $\tilde{p}_\mu \geq 0$ für alle μ und wegen $\tilde{p}_1+\ldots+\tilde{p}_m = 1$ wieder eine Strategie.

Aus (6.6) folgt nach (6.5)

$$(6.7)\quad a(\bar{\varphi},y) \leq a(\tilde{\varphi},y) \quad \text{für alle } y \in Y_R$$

$$= a(\tilde{\varphi},y) \quad \text{für alle } y \in X_V .$$

Sei $\tilde{\eta} := (\tilde{q}_1,\ldots\tilde{q}_n)$ eine Gleichgewichtsstrategie

mit $\tilde{q}_j \begin{cases} > 0 & y_j \in Y_V \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$, dann gilt nach (6.7) und Satz 4.5:

$$(6.8)\quad a(x,\tilde{\eta}) \leq a(\tilde{\varphi},\tilde{\eta}) = a(\tilde{\varphi},\tilde{\eta}) \leq a(\tilde{\varphi},y) \leq a(\tilde{\varphi},y)$$

für alle $x \in X$ und $y \in Y_R \cup Y_V$.

Nach Korollar 5.10.1 ist $\overline{\Gamma}_R$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel, ferner ist $\tilde{\varphi} \in P(X_R)$ und $\tilde{\eta} \in Q(Y_R)$, also folgt aus (6.8):

$$(6.9)\quad b(x,\tilde{\eta}) \geq b(\tilde{\varphi},\tilde{\eta}) \geq b(\tilde{\varphi},y)$$

für alle $x \in X_R$ und $y \in Y_R$.

Damit ist $\tilde{\mathcal{P}}$ Gleichgewichtsstrategie im Spiel $\overline{\sigma}_R$ und nach Korollar 1.5.1 auch in $\overline{\sigma}$. Daraus folgt:

$$\tilde{p}'_\mu \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x_\mu \in X_R \cap X_W \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt $\mathcal{P}'_i \in P(X_R \cap X_W)$ für alle $i = 1,\ldots,k$.

SATZ 6.3:

Sei $i_o \in \{1,\ldots,k\}$. Existiertzu jedem x_i $(1 \leq i \leq i_o)$ ein $\mathcal{P}_i \in P(X_R \cup X_W - \{x_1,\ldots,x_i\})$, so daß (6.5) erfüllt ist, dann existieren $\mathcal{P}'_i \in P(X_R \cup X_W - \{x_1,\ldots,x_i\}_o)$, so daß gilt:

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\mathcal{P}'_i,y) = a(x_i,y) \\ b(\mathcal{P}'_i,y) = b(x_i,y) \end{array} \right\} \quad \text{für alle } y \in Y_V,\ 1 \leq i \leq i_o .$$

Beweis:

a) Da $\overline{\sigma}$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel ist, definiert man entsprechend zu (2.1) und (2.2)

$$Q_a^V(\tilde{\mathcal{P}}) := \{\eta \in Q(Y_R \cup Y_V):\ a(\tilde{\mathcal{P}},\eta) = \max_{\mathcal{P} \in P(X_R \cup X_W)} a(\mathcal{P},\eta)\}$$

$$Q_b^V(\tilde{\mathcal{P}}) := \{\eta \in Q(Y_R \cup Y_V):\ b(\tilde{\mathcal{P}},\eta) = \min_{\mathcal{P} \in P(X_R \cup X_W)} b(\mathcal{P},\eta)\} .$$

Dann gilt entsprechend zu (4.19) (Seite 82)

$$(6.11) \quad Q_a^V(\mathcal{P}) \subset Q_b^V(\mathcal{P}) \quad \text{für alle } \mathcal{P} \in P(X_R \cup X_W)$$

Ferner gilt nach Satz 4.7 für jede Gleichgewichtsstrategie aus $\overline{\sigma}$ auch $\overline{\eta} \in Q_a^V(\mathcal{P})$ für alle $\mathcal{P} \in P(X_W)$, also $\overline{\eta} \in Q_a^V(x_i)$.

Damit ergibt sich $Q_a^V(x_i) \neq \emptyset \neq Q_b^V(x_i)$.

Man hat ferner nach (6.5)

$$Q_a^V(x_i) \subset Q_a^V(\mathcal{P}_i) \quad \text{für } i=1,\ldots,i_o.$$

Nach Korollar 2.5.2 c) erhält man daraus mit (6.11)

$$Q(Y_R \cup Y_V) = \overbrace{\qquad}^{x \in X_R \cup X_W - \{x_1,..,x_{i_o}\}} Q_a^V(x) = \overbrace{\qquad}^{x \in X_R \cup X_W - \{x_1,..,x_{i_o}\}} Q_b^V(x) .$$

Nimmt man an, die Menge $Y_R \cup Y_V$ enthalte genau n reine Strategien, so ergibt sich folgende Fallunterscheidung (vgl. Satz 4.11):

(1) $\dim Q_b^V(x_i) < n-1$:

Dann existieren nach Satz 3.14 Strategien

$\mathcal{S}_i' \in P(X_R \cup X_W - \{x_1,\ldots,x_{i_o}\})$ mit

(6.12) $b(\mathcal{S}_i', y) \leq b(x_i, y)$ für alle $y \in Y_R \cup Y_V$.

Ferner gilt

(6.13) $b(\mathcal{S}_i', y) = b(x_i, y)$ für alle $y \in Y_V$.

Andernfalls würde man wie in Satz 6.1 mit einer bzgl. $Q(Y_V)$ streng gemischten Gleichgewichtsstrategie $\tilde{\sigma}$ im Widerspruch zu Satz 4.7 gerade $b(\mathcal{S}_i', \tilde{\sigma}) < b(x_i, \tilde{\sigma})$ erhalten.

(2) $\dim Q_b^V(x_i) = n-1$:

Dann existiert wie im Beweis zu Satz 4.11 zu jedem $i \in \{1,\ldots,i_o\}$ ein $i' \neq i$ mit $Q_b^V(x_i') = Q_b^V(x_i)$, d.h., es gilt (6.13) für alle $y \in Y_R \cup Y_V$ und $\mathcal{S}_i'$ entspricht der Strategie $x_i' \in X_R \cup X_W - \{x_1,\ldots x_{i_o}\}$.

b) Sei $\bar{\mathcal{S}} := (\bar{p}_1,..,\bar{p}_m)$ eine Gleichgewichtsstrategie mit $\bar{p}_i \begin{cases} > 0 & x_i \in X_W \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$, dann gilt nach (6.13) auch

$$(6.14) \quad \bar{p}_i (b(\mathcal{S}_i', y) - b(x_i, y)) \begin{cases} \leq 0 \text{ für } y \in Y_R \\ = 0 \text{ für } y \in Y_V \end{cases} .$$

Definiert man $\mathcal{P}_i' := \{p_{i1}', \ldots, p_{im}'\}$ und $\mathcal{P}^* := \{p_1^*, \ldots, p_m^*\}$

mit $p_\mu^* := \begin{cases} 0 & \mu = i \\ \bar{p}_\mu + \bar{p}_i p_{i\mu}' & \text{sonst} \end{cases}$, so gilt:

$$\max_{\eta \in Q(Y_R \cup Y_V)} b(\mathcal{P}^*, \eta) = \max_{\eta \in Q(Y_R \cup Y_V)} \left(b(\bar{\mathcal{P}}, \eta) + \bar{p}_i (b(\mathcal{P}_i', \eta) - b(x_i, \eta)) \right) =$$

$$= \max_{\eta \in Q(Y_R \cup Y_V)} b(\bar{\mathcal{P}}, \eta) = b(\bar{\mathcal{P}}, y) = b(\mathcal{P}^*, y) \quad \text{für alle } y \in Y_V.$$

Daraus folgt nach Definition 4.1:

$$a(\bar{\mathcal{P}}, y) = \min_{\eta \in Q(Y_R \cup Y_W)} a(\bar{\mathcal{P}}, \eta) = \min_{\eta \in Q(Y_R \cup Y_W)} a(\mathcal{P}^*, \eta) = a(\mathcal{P}^*, y) \quad \text{für alle } y \in Y_V.$$

Dann gilt nach der Definition von $\bar{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{P}^*$ für alle $y \in Y_V$

$$0 = a(\bar{\mathcal{P}}, y) - a(\mathcal{P}^*, y) = \bar{p}_i (a(x_i, y) - a(\mathcal{P}_i', y)) \quad \text{und damit}$$

$$(6.15) \qquad a(\mathcal{P}_i', y) = a(x_i, y) \quad \text{für alle } y \in Y_V.$$

KOROLLAR 6.3.1:

Zu jedem x_i $(i=1,..,k)$ existiere ein $\mathcal{P}_i \in P(X_R)$, so daß (6.10) für $Y_V = Y_W$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\mathcal{P}_i \in P(X_R \cap X_V) \quad \text{für alle } i=1,\ldots,k.$$

Beweis: und Satz 6.1,

Nach Voraussetzung gelten die Bedingungen (6.12) und (6.13) für $\mathcal{P}_i \in P(X_R)$ und $i=1,\ldots,k$. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 6.2 b).

Definiert man nämlich $\bar{\mathcal{P}}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$ wie im Beweis von Satz 6.2 b), so erhält man analog zu (6.7)

$$(6.16) \qquad b(\bar{\mathcal{P}}, y) \geq b(\tilde{\mathcal{P}}, y) \quad \text{für alle } y \in Y_R$$

$$= b(\tilde{\mathcal{P}}, y) \quad \text{für alle } y \in Y_V \quad .$$

Sei $\tilde{\sigma}_{\eta} := (\tilde{q}_1,..,\tilde{q}_n)$ eine Gleichgewichtsstrategie mit $\tilde{q}_j \begin{cases} > 0 & y_j \in Y_V \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$, dann gilt nach (6.16) und Satz 4.5

(6.17) $b(x,\tilde{\sigma}_{\eta}) \geq b(\bar{\varphi},\tilde{\sigma}_{\eta}) = b(\tilde{\varphi},\tilde{\sigma}_{\eta}) \geq b(\bar{\varphi},y) \geq b(\tilde{\varphi},y)$

für alle $x \in X$ und $y \in Y_R \cup Y_V$.

Wegen $\tilde{\varphi} \in P(X_R)$ und Korollar 5.10.1 folgt daraus

(6.18) $a(x,\tilde{\sigma}_{\eta}) \leq a(\tilde{\varphi},\tilde{\sigma}_{\eta}) \leq a(\tilde{\varphi},y)$ für alle $x \in X_R$, $y \in Y_R$.

Also ist $\tilde{\varphi}$ Gleichgewichtsstrategie in $\bar{\sigma}_R$ und damit in $\bar{\sigma}$. Daraus folgt die Behauptung.

SATZ 6.4:

a) Zu jedem $x_i (i=1,...,k)$ existiert ein $\varphi_i \in P(X_R \cap X_W)$, so daß gilt:

(6.19) $a(\varphi_i,y) \geq a(x_i,y)$ für $y \in Y_R$

$= a(x_i,y)$ für $y \in Y_W$.

b) Ebenso existiert zu jedem $y_j (j=1,...,l)$ ein $\sigma_{\eta_j} \in Q(Y_R \cap Y_W)$, so daß gilt:

(6.20) $b(x,\sigma_{\eta_j}) \geq b(x,y_j)$ für $y \in Y_R$

$= b(x,y_j)$ für $y \in Y_W$.

Beweis:

1) Zunächst soll gezeigt werden, daß die Behauptung (6.19) bzw. (6.20) für $\varphi_i \in P(X_R \cup X_W - \{x_1,..,x_i\})$ bzw. für $\sigma_{\eta_j} \in Q(Y_R \cup Y_W - \{y_1,..,y_j\})$ erfüllt ist. Dies geschieht mit Hilfe vollständiger Induktion nach der Reihenfolge der zu eliminierenden Strategien $x_1,...,x_k,y_1,...,y_l$.

Ist x_1 die erste Strategie, die bei Reduktion von $\bar{\sigma}$ auf $\bar{\sigma}_R$ eliminiert wird, so existiert ein $\varrho_1 \in P(X_R \cup X_W - \{x_1\})$ mit $\varrho_1 \underset{(Y_R \cup Y_W)}{\rhd} x_1$, es gilt also:

$$a(\varrho_1, y) \begin{cases} \geq a(x_1, y) & \text{für alle } y \in Y_R \\ = a(x_1, y) & \text{für alle } y \in Y_W \end{cases} .$$

Andernfalls erhält man mit

$$a(\varrho_1, \bar{\eta}) > a(x_1, \bar{\eta}) ,$$

wobei $\bar{\sigma}_\eta := (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n)$ eine Gleichgewichtsstrategie mit $\bar{q}_j \begin{cases} > 0 & \text{für } y_j \in Y_W \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist, einen Widerspruch zu Satz 4.7.

Entsprechend zeigt man, falls y_1 die erste zu eliminierende Strategie ist,

$$b(x, \varrho_1) \begin{cases} \geq b(x, y_1) & \text{für alle } x \in X_R \\ = b(x, y_1) & \text{für alle } x \in X_W \end{cases} .$$

Damit hat man die Induktionsverankerung und man nimmt an, die Behauptung sei bis zum μ-ten Schritt ($1 \leq \mu < k+1$) bewiesen. Ferner sei x_s mit $s \in \{1, \ldots, k\}$ die Strategie, die im $(\mu+1)$-ten Schritt zu streichen ist.

a) Hat man bisher nur Strategien aus $X_r \cup X_W$ gestrichen, so existiert zu jedem x_i ($i=1,\ldots,s$) ein $\varrho_i \in P(X_R \cup X_W - \{x_1, \ldots, x_i\})$ mit

$$\varrho_i \underset{(Y_R \cup Y_W)}{\rhd} x_i$$

und daraus folgt die Behauptung (vgl. dazu den Beweis der Induktionsverankerung).

b) Analog gilt die Behauptung, falls man bis zum $(\mu+1)$ -ten Schritt nur Strategien aus $Y_r \cup Y_W$ eliminieren konnte.

c) Andernfalls seien bis zum $(\mu+1)$ -ten Schritt $x_1,..,x_{s-1}$ sowie $y_1,...,y_t$ mit $t\in\{1,..,l\}$ eliminiert. Dann gibt es zu jedem $x_i (i=1,...,s-1)$ ein $\varrho_i \in P(X_R \cup X_W - \{x_1,..,x_i\})$ mit

$$(6.21)\quad a(\varrho_i,y) \begin{cases} \geq a(x_i,y) & \text{für } y\in Y_R \\ = a(x_i,y) & \text{für } y\in Y_W \end{cases},$$

ferner zu jedem y_j $(j=1,..,t)$ ein $\sigma_j \in Q(Y_R \cup Y_W - \{y_1,..,y_j\})$ mit

$$(6.22)\quad b(x,\sigma_j) \begin{cases} \leq b(x,y_j) & \text{für } x\in X_R \\ = b(x,y_j) & \text{für } x\in X_W \end{cases}.$$

Zu x_i $(i=s,..,k)$ existieren nach Satz 6.1 Strategien $\varrho_i \in P(X_R)$ mit

$$(6.23)\quad a(\varrho_i,y) \begin{cases} \geq a(x_i,y) & \text{für } y\in Y_R \\ = a(x_i,y) & \text{für } y\in Y_R \cap Y_W \end{cases}$$

und ebenso zu y_j $(j=t+1,..,l)$ Strategien $\sigma_j \in Q(Y_R)$ mit

$$(6.24)\quad b(x,\sigma_j) \begin{cases} \leq b(x,y_j) & \text{für } x\in X_R \\ = b(x,y_j) & \text{für } x\in X_R \cap X_W \end{cases}.$$

Mit (6.21) - (6.24) sind die Voraussetzungen von Satz 6.2 für $Y_V = Y_R \cap Y_W$ erfüllt, also gilt nach Satz 6.2 b)

$$\varrho_i \in P(X_R \cap X_W) \quad \text{für } i=s,...,k$$
$$\sigma_j \in Q(Y_R \cap Y_W) \quad \text{für } j=t+1,...,l\ .$$

Nimmt man an, (6.21) gilt nicht für i=s, so existiert, wegen $a(\varphi_s,y) \geq a(x_s,y)$ für alle $y \in Y_R \cup Y_W - \{y_1,\ldots,y_t\}$ (nach Annahme c)), ein $y_j \in \{y_1,\ldots,y_t\}$, so daß gilt:

(6.25) $\quad a(\varphi_s,y_j) < a(x_s,y_j)$.

Sei $j_o := \max\{ j \in \{1,..,t\} : a(\varphi_s,y_j) < a(x_s,y_j)\}$, so gibt es mit (6.22) für $j=1,\ldots,j_o$ nach Satz 6.3 zu jedem y_j ein $\sigma'_j \in Q(Y_R \cup Y_W - \{y_1,\ldots,y_{j_o}\})$, so daß gilt:

$$\left.\begin{aligned} a(x,\sigma'_j) &= a(x,y_j) \\ b(x,\sigma'_j) &= b(x,y_j) \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } x \in X_W .$$

Wegen $\varphi_s \in P(X_R \cap X_W)$ folgt daraus speziell für $j=j_o$

(6.26) $\quad a(x_s,\sigma'_{j_o}) = a(x_s,y_{j_o})$

$\qquad\quad a(\varphi_s,\sigma'_{j_o}) = a(\varphi_s,y_{j_o})$.

Aus (6.25) und (6.26) folgt für $\sigma'_{j_o} \in Q(Y_R \cup Y_W - \{y_1,..,y_{j_o}\})$

$$a(\varphi_s,\sigma'_{j_o}) < a(x_s,\sigma'_{j_o})$$

im Widerspruch zur Maximalität von j_o. Damit gilt (6.21) für i=s und die Behauptung von 1) ist gezeigt.

2) Wegen 1) sind die Voraussetzungen von Satz 6.2 für $Y_V = Y_W$ erfüllt. Es existieren φ^*_i (i=1,..,k), so daß (6.19) erfüllt ist, sowie σ^*_j (j=1,,.l), so daß (6.20) erfüllt ist und es gilt:

$$\varphi^*_i \in P(X_R \cap X_W) \quad \text{für alle } i=1,..,k$$

$$\sigma^*_j \in Q(Y_R \cap Y_W) \quad \text{für alle } j=1,..,l .$$

KOROLLAR 6.4.1:

a) Zu jedem $x \in X_W$ $(x \notin X_R)$ existiert ein $\varphi(x) \in P(X_R \cap X_W)$ mit

$$\begin{aligned} a(\varphi(x),\eta) &= a(x,\eta) \\ b(\varphi(x),\eta) &= b(x,\eta) \end{aligned} \quad \text{für alle } \eta \in Q(Y_W) .$$

b) Ebenso existiert zu jedem $y \in Y_W$ $(y \notin Y_R)$ ein

$\eta(y) \in Q(Y_R \cap Y_W)$ mit

$$\begin{aligned} a(\varphi,\eta(y)) &= a(\varphi,y) \\ b(\varphi,\eta(y)) &= b(\varphi,y) \end{aligned} \quad \text{für alle } \varphi \in P(X_W) .$$

Beweis:

Es gilt Satz 6.4 und damit hat man die Voraussetzungen von Satz 6.3 für $i_o = k$ und $Y_V = Y_W$. Nach Satz 6.3 und Korollar 6.3.1 folgt die Behauptung a).

Die Aussage b) wird ganz entsprechend gezeigt.

SATZ 6.5:

Das Spiel $\bar{\sigma}$ sei reduzierbar auf $\bar{\sigma}_R$. Dann ist das Spiel $\bar{\sigma}_W := (P(X_W), Q(Y_W); a, b)$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Beweis:

a) $\bar{\sigma}_R$ ist nach Korollar 5.10.1 strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel, es existiert also ein $s > 0$ mit:

$$sa(\varphi,\eta) + b(\varphi,\eta) = 0, \text{ wobei } \varphi \in P(X_R), \eta \in Q(Y_R).$$

Dann gilt nach Korollar 6.4.1:a) :

$$sa(x,\eta) + b(x,\eta) = 0$$

für $x \in X_W$ $(x \notin X_R)$, $\eta \in Q(Y_R \cap Y_W)$.

Also ist das Spiel $(P(X_R \cup X_W), Q(Y_R \cap Y_W) ; a,b)$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

b) Nach a) gilt:

$$sa(\varrho,\sigma) + b(\varrho,\sigma) = 0$$

für $\varrho \in P(X_R \cup X_W)$, $\sigma \in Q(Y_R \cap Y_W)$.

Dann gilt nach Korollar 6.4.1 b) :

$$sa(\varrho,y) + b(\varrho,y) = 0 \quad \text{für alle } \varrho \in P(X_W) \text{ und } y \in Y_W \ (y \notin Y_R) .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

SATZ 6.6:

Das Spiel $\bar{\Gamma} := (P(X_r \cup X_w), Q(Y_r \cup Y_w) ; a,b)$ sei nicht reduzierbar. Dann ist $\bar{\Gamma}$ strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Der Beweis ergibt sich direkt aus Korollar 4.9.1 und 5.10.1.

SATZ 6.7:

Ist (P,Q;a,b) ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, so ist das wesentliche Teilspiel von (P,Q;a,b) strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Der Beweis ergibt sich aus den Sätzen 6.5 und 6.6 wegen $X_W \supset X_w$ und $Y_W \supset Y_w$.

KOROLLAR 6.7.1:

Sei (P,Q;a,b) ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel und existiert ein Gleichgewichtspunkt $(\bar{\varrho},\bar{\sigma})$ mit $\nu_{\bar{\varrho}} \in P$, $\nu_{\bar{\sigma}} \in Q$. Dann ist (P,Q;a,b) strategisch äquivalent zu einem einem Nullsummen-Spiel.

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß mit

$\bar{\varrho} \succ \nu$ gilt: $X_w = X$

und mit $\bar{\eta} \succ \nu$: $Y_w = Y$.

Man hält damit fest:

Es sei (P,Q;a,b) ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel und ($P(X_r)$,$Q(Y_r)$; a,b) das reduzierte, ($P(X_w)$,$Q(Y_w)$; a,b) das wesentliche Teilspiel von (P,Q;a,b). Dann wurde bewiesen, daß sowohl das reduzierte Teilspiel (Satz 5.10) als auch das wesentliche Teilspiel (Korollar 6.2.1) strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel ist.

Es soll noch kurz das "minimale" Teilspiel von (P,Q;a,b) diskutiert werden, welches sowohl das reduzierte wie das wesentliche Teilspiel enthält, also das Spiel ($P(X_r \cup X_w)$,$Q(Y_r \cup Y_w)$; a,b). Dazu gilt:

SATZ 6.3:

Ist (P,Q;a,b) ein zweiseitiges Konkurrenz-Spiel, sowie ($P(X_r)$,$Q(Y_r)$; a,b) das reduzierte und ($P(X_w)$,$Q(Y_w)$;a,b) das wesentliche Teilspiel von (P,Q;a,b), dann ist das Teilspiel ($P(X_r \cup X_w)$,$Q(Y_r \cup Y_w)$; a,b) im allgemeinen nicht strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Der Beweis wird mit Hilfe eines Gegenbeispiels erbracht. Ein Spiel $\bar{\sigma}_{11}$ = (P,Q;a,b) sei gegeben durch seine Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2+\varepsilon \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2-\varepsilon \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 \end{pmatrix},$$

wobei $\varepsilon > 0$ ist.

Setzt man $\varepsilon = 4000$, so wäre $\bar{\Gamma}_{11}$ ein Nullsummen-Spiel.

Hier sei $0 < \varepsilon < 1$.

Dann ist $\bar{\Gamma}_{11}$ zweiseitiges Konkurrenz-Spiel.

Ferner ist das reduzierte Teilspiel $\bar{\Gamma}_r$ von $\bar{\Gamma}_{11}$ gegeben durch

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2+\varepsilon \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B_r := -A_r .$$

Wegen $A_r = -B_r$ ist $\bar{\Gamma}_r$ ein Nullsummen-Spiel.

Das wesentliche Teilspiel $\bar{\Gamma}_w$ von $\bar{\Gamma}_{11}$ ist gegeben durch

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B_w = -A_w .$$

$(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ist Gleichgewichtspunkt mit $\bar{\xi} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ und $\bar{\eta} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ im Spiel $\bar{\Gamma}_{11}$.

Ferner existiert keine Gleichgewichtsstrategie für Spieler II, deren letzte Komponente von 0 verschieden ist.

Denn jede Gleichgewichtsstrategie $\bar{\eta} \in Q$ erfüllt nach Korollar 1.3.1 die Bedingungen (1,17), also hier:

$$a(x_i, \bar{\eta}) = a(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, 4 .$$

Dann folgt aus

$$\sum_{i=1}^{3} a(x_i, \bar{\eta}) = 0 \quad \text{gerade } \bar{q}_4 = 0$$

Ferner gilt $(P(X_r \cup X_w) = P$ und $Q(Y_r \cup Y_w) = Q$.

Man hat aber

$$a(x_i,y_j) + b(x_i,y_j) \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{für } i=j=4 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Damit ist $\tilde{\sigma}_{11} = (P(X_r \cup X_w), Q(Y_r \cup Y_w); a,b)$ nicht strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.

Literaturhinweise:

I1I A.D. Alexandrow:
"Konvexe Polyeder"
Berlin 1958.

I2I D. Bierlein:
"Spieltheoretische Modelle für Entscheidungssituationen des Versicherers"
Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik - Band III, Heft 4.

I3I R.G. Busacker - T.S. Saaty:
"Endliche Graphen und Netzwerke"
München - Wien 1968.

I4I E. Burger:
"Einführung in die Theorie der Spiele"
Berlin 1959.

I5I W. Franz:
"Topologie"
Berlin 1965.

I6I D. Gale:
"The Theory of Linear Economic Models"
New York - Toronto - London 1960.

I7I P.R. Halmos:
"Naive Set Theory"
New York - Totonto - London 1965.

I8I S. Karlin:
"Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics"
Reading, Massachusetts - Palo Alto - London 1962.

I9I D.König:
"Theorie der endlichen und unendlichen Graphen"
New York 1935.

I10I R.D. Luce - H. Raiffa:
"Games and Decisions"
New York 1958.

I11I J.v.Neumann - O. Morgenstern:
"Theory of Games and Economic Behaviour"
Princeton 1953.

I12I H. Schubert:
"Topologie"
Stuttgart 1964.

I13I H. Seifert - W. Threllfall:
"Lehrbuch der Topologie"
Leipzig - Berlin 1934.

I14I A. Wald:
"Statistical Decision Functions"
New York 1958.

Lebenslauf.

Am 8.Juni 1939 wurde ich in Deggendorf/Niederbayern geboren. Mein Vater Dr. Franz Stephan Opitz ist Oberforstrat i.R., meine Mutter Emmi Opitz Hausfrau.
Vom Herbst 1945 bis zum Herbst 1949 besuchte ich die Volksschule in Deggendorf und Regensburg/Donau. Danach besuchte ich 6 Jahre das Alte Gymnasium in Regensburg, anschließend das Humanistische Gymnasium Straubing und schließlich das Humanistische Gymnasium Passau, wo ich im Juli 1958 die Reifeprüfung ablegte.
Mein Studium der Mathematik und Physik begann ich im Wintersemester 1958/59 an der Universität München und bestand dort am 30.Juli 1961 die Diplomvorprüfung für Mathematiker, ferner unterzog ich mich der Prüfung in Pädagogik und Philosophie für Lehrer an höheren Schulen.
Am 1.November 1963 wechselte ich an die Universität des Saarlandes, wo ich im März 1966 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematiker mit einer Arbeit aus dem Gebiet der Spieltheorie ablegte. Vorher hatte ich mich noch im Frühjahr 1964 einem zweimonatigen Praktikum bei Siemens & Halske in München und im Herbst 1964 einem dreimonatigen Praktikum bei der IBM in Sindelfingen und Bremen unterzogen.
Herr Professor Dr. Bierlein betraute mich im April 1966 mit der Verwaltung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Institut für Mathematische Statistik der Universität Karlsruhe, die ich bis 31. März 1968 innehatte.

Seit 1. April 1968 bin ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle von Herrn Professor Dr. Henn am Institut für Wirtschafts- und Sozialforschung, Sektion für Ökonometrie und Unternehmensforschung.

Von meinen akademischen Lehrern danke ich besonders den Herren Professoren Dr. J. André und Dr. D. Bierlein dafür, daß sie mein Interesse an der Spieltheorie weckten.
Herrn Professor Dr. R. Henn danke ich, daß er in der Zeit meiner Zugehörigkeit zum Institut für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften immer bemüht war, mir die Fülle von Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik auf wirtschaftstheoretische Probleme aufzuzeigen.
In Saarbrücken waren u.a. die Herren Professoren
Dr. J. André, Dr. H. Söhngen, Dr. E. Lamprecht, Dr. D. Puppe, Dr. J. Dörr, Dr. E. Eckart, Dr. A. W. Maue meine Lehrer,
in München die Herren Professoren
Dr. H. Richter, Dr.G. Aumann, Dr. M. Kneser, Dr. K. Stein, Dr. M. Koecher, Dr. P. Bopp, Dr. Rollwagen, Dr. Schlüter.